ÜBER FOURIERSCHE DOPPELREIHEN
UND DAS
POISSONSCHE DOPPELINTEGRAL.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

II. SEKTION DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER KGL. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

AM 19. JUNI 1913

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

WALTER WOLLEBEN KÜSTERMANN.

MÜNCHEN
DR. WILD'SCHE BUCHDRUCKEREI GEBR. PARCUS
1913.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548312_0006

ÜBER FOURIERSCHE DOPPELREIHEN
UND DAS
POISSONSCHE DOPPELINTEGRAL.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

II. SEKTION DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER KGL. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

AM 19. JUNI 1913

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

VORGELEGT VON

WALTER WOLLEBEN KÜSTERMANN.

MÜNCHEN
DR. WILD'SCHE BUCHDRUCKEREI GEBR. PARCUS
1913.

INHALT.

Seite

Einleitung 5

§ 1. Summation der Fourierschen Doppelreihe im gewöhnlichen Sinne und nach Diagonalen 8

§ 2. Das Dirichletsche Doppelintegral 15

§ 3. Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz im gewöhnlichen Sinne 24

§ 4. Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der zu $f(x, y)$ gehörigen Diagonalreihe 29

§ 5. Die Fejèrsche Summationsmethode 34

§ 6. Ueber das Poissonsche Doppelintegral 39

§ 7. Vergleich der verschiedenen Darstellungsmethoden durch Anwendung auf ein Beispiel 52

Die ersten Arbeiten über Fouriersche Doppelreihen sind meines Wissens von Ascoli[1]) veröffentlicht und stammen aus dem Jahre 1879. Sie behandeln die trigonometrischen Reihen im allgemeinen, stützen sich jedoch auf eine unzulängliche Definition der Konvergenz einer Doppelreihe und ihre Resultate sind mit großer Vorsicht aufzunehmen. Der heute maßgebliche Konvergenzbegriff für Doppelreihen ist der von Stolz[2]) herrührende und durch die grundlegende Pringsheimsche Arbeit über die „Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen“[3]) allgemein zur Annahme gelangte. Diesen benutzen auch alle folgenden Autoren.

Im Jahre 1903 erschien eine Arbeit von Krause[4]), in welcher bewiesen wurde, daß eine Funktion von zwei Variabeln $f(x, y)$, die nach beiden Axenrichtungen monoton verläuft, und für welche der Ausdruck:

$$\triangle f(x, y, h, k) \equiv f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$$

wenigstens abteilungsweise sein Vorzeichen nicht ändert, in eine convergente Fouriersche Doppelreihe entwickelbar ist.

Unabhängig hiervon zeigte Hardy[5]), später Vergerio[6]), dem Vorgange Jordans für einfache Fourierreihen folgend, daß eine Funktion von zwei Variabeln immer dann in eine Fouriersche Doppelreihe entwickelt werden kann, wenn sie „von beschränkter Schwankung“ ist. Jede Funktion von beschränkter Schwankung läßt sich nun als Summe oder Differenz zweier gleichsinnig[7]) monoton zunehmenden Funktionen $\ominus_1(x, y)$, $\ominus_2(x, y)$ darstellen, die außerdem die Ungleichung[8]) befriedigen:

$$(1) \qquad \triangle \ominus (x, y, h, k) \geq 0$$

---

[1]) Ascoli, Sulla rappresentabilita di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometriche. Reale Acc. d. Lincei, Roma, 1879; und, daselbst: Sulle serie trigonometriche a due variabili, 7. Bd. d. 3. Serie.

[2]) Stolz, Über unendliche Doppelreihen, Math. Ann. Bd. 24.

[3]) Pringsheim, Münchner Sitzgsber. Bd. 27, 1897, p. 101.

[4]) Krause, Über Fouriersche Reihen mit zwei veränderlichen Größen, Leipz. Sitzgsber. Bd. 55, 1903, p. 164.

[5]) Hardy, On double Fourier Series, Quart. Journal of Math. No. 145. 1905.

[6]) Vergerio, Giornale di Matematiche, 1911, p. 181.

[7]) d. h. die Funktion muß nach beiden Axenrichtungen gleichzeitig steigen (oder fallen).

[8]) Hardy, p. 58.

Somit ergibt sich die Krausesche Bedingung als Spezialfall der Hardyschen, denn Funktionen, die der Krauseschen Bedingung genügen, sind sicher „von beschränkter Schwankung".

Die drei letztgenannten Autoren führen ihre Beweise mit Hilfe eines sogen. „zweiten" Mittelwertsatzes für Doppelintegrale, eines Analogon des bekannten zweiten Mittelwertsatzes für einfache Integrale. Verzichtet man auf die Anwendung jenes Satzes und benutzt zum Beweise der Konvergenz des Summationsintegrals der Fourierschen Doppelreihe nur eine zweckentsprechende Zerlegung in Teilintegrale, wie es in § 2 der vorliegenden Arbeit geschehen ist, so stellt sich heraus, daß die Ungleichung (1) überflüssig ist, und daß jede Funktion, die sich als Summe oder Differenz zweier gleichsinnig monotoner Funktionen darstellen läßt — eine „monotonoïde" Funktion will ich sie im Anschluß an Herrn Pringsheim nennen — in eine Fouriersche Doppelreihe entwickelbar ist.

Die Hardyschen Funktionen mit beschränkter Schwankung sind also spezielle Fälle der monotonoïden Funktionen.

Außer zur Darstellung willkürlich vorgegebener Funktionen dienen die Fourierschen Reihen auch zur Untersuchung des Verhaltens von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. Handelt es sich um analytische Funktionen von zwei veränderlichen Größen, so artet auf den Konvergenzkreisen (Einheitskreise) die ein Funktionselement darstellende Taylorsche Reihe in eine nach Diagonalen summierte Fouriersche Doppelreihe aus. Da nun im allgemeinen, d. h. wo es sich nicht um absolut konvergente Doppelreihen handelt, die Existenz der Doppelreihensumme im gewöhnlichen Sinne keineswegs für die Konvergenz der Diagonalreihe bürgt[1]), und da die Frage nach der Existenz der Diagonalsumme der Fourierschen Doppelreihe meines Wissens nirgends behandelt ist, so habe ich sie in § 4 untersucht. Die hierin gegebene Bedingung hat ähnlichen Charakter wie die von § 3, ist aber keineswegs mit ihr identisch.

In einer 1904 erschienenen Arbeit hat Fejèr[2]) gezeigt, daß die Folge der arithmetischen Mittel der Partialsummen der Fourierschen Reihe, resp. die daraus gebildete „Fejèrsche Reihe", auch dann noch konvergiert, wenn es die einfache Fourierreihe nicht mehr tut; mit anderen Worten, die Fouriersche Reihe einer jeden integrablen Funktion ist „von der ersten Ordnung summabel". Fejèr bewies dies mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes

---

[1]) Vergl. Pringsheim, l. c. p. 124 und die darauffolgenden Beispiele.
[2]) Fejèr, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Ann. 58.

allein, und da dieser ohne Einschränkung auch für Doppelintegrale gilt, so lag der Gedanke nahe, daß sich die Fejèrschen Resultate ohne Schwierigkeit auf die Fouriersche Doppelreihe würden übertragen lassen. Das ist in der Tat, wenigstens für endliche Funktionen, der Fall (§ 5).

Nahe verwandt mit der Fourierschen Reihe ist das Poissonsche Integral[1]). Es entsteht bei der Summation der mit den Konvergenzfaktoren $r^n (r < 1)$ versehenen Fourierreihe und hat als analytisches Darstellungsmittel etwa die Tragweite der „Fejèrschen Reihe". Da es eine bedeutend knappere Form besitzt als jene, so scheint es für eine Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher besonders geeignet. Eine Funktion von einer Variablen kann nur zwei Arten von endlichen Unstetigkeiten besitzen, nämlich Punkte, in denen die Funktion einen bloßen „Sprung" macht und solche, in deren Umgebung sie unendlich oft oszilliert. Viel komplizierter ist die Sachlage bei unstetigen Funktionen mehrerer Variablen. Ich habe mich bemüht, das Verhalten des Poissonschen Integrals an Unstetigkeitsstellen besonders zu berücksichtigen (§ 6).

Nach Fertigstellung dieser Arbeit sind zwei Veröffentlichungen aus dem Jahre 1912 zu meiner Kenntnis gelangt, die sich ebenfalls mit einigen der hier behandelten Probleme befassen. Die erste, von Moore[2]), enthält eine Ankündigung von Resultaten über die Fejèrsche Reihe in Anwendung eines allgemeinen Satzes über Doppelreihen[3]). Die zweite, von W. H. Young[4]) bringt eine sehr eingehende Untersuchung über Fouriersche Doppelreihen und ihre Summation nach den verschiedenen Cesàroschen Methoden, zu denen ja auch das Fejèrsche Verfahren gehört. Für die Konvergenz der gewöhnlichen Doppelreihe wird ein Integralkriterium aufgestellt. Ob dieses Kriterium umfassender ist, als das hier angegebene, entzieht sich zurzeit noch meiner Beurteilung. Jedenfalls sind die dort verwandten Methoden von denen der vorliegenden Arbeit ganz verschieden.

---

[1]) Vergl. Bôcher, An Introduction to Fourier Series, Annals of Math., 2nd Ser. Vol. 7, ## 2—3, 1906.

[2]) Moore, Comptes rendues, t. 154, p. 126, 1912.

[3]) Mittlerweile sind auch die Beweise hierzu veröffentlicht worden in den Trans. Amer. Math. Soc. Vol. XIV. No. 1, pp. 73—104 Jan. 1913.

[4]) W. H. Young, Proc. Lond. Math. Soc. Series 2, Vol. 11, p. 133. 1912.

§ 1.

Summation der Fourierschen Doppelreihe im gewöhnlichen Sinne und nach Diagonalen.

Jede Doppelreihe von der Form:

$$s(x,y) = \sum_{0}^{\infty} {}_{\mu,\nu} \, B_{\mu}^{\nu}(x, y)$$

$$(1) \qquad = \sum_{0}^{\infty} {}_{\mu,\nu} \left| \begin{array}{l} (a_{\mu}^{\nu} \cos \mu x + b_{\mu}^{\nu} \sin \mu x) \cos \nu y \\ + (c_{\mu}^{\nu} \cos \mu x + d_{\mu}^{\nu} \sin \mu x) \sin \nu y \end{array} \right|$$

heißt eine trigonometrische Doppelreihe. Man bezeichnet sie als die Fouriersche Doppelreihenentwicklung der Funktion f (x, y), falls ihre Coeffizienten die Fouriersche Form haben, nämlich:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{o}^{o} = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \int_{\pi}^{+\pi} f(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta; \qquad b_{o}^{o} = c_{o}^{o} = d_{o}^{o} = 0 \\ \left.\begin{matrix} a_{\mu}^{o} \\ b_{\mu}^{o} \end{matrix}\right| \dfrac{1}{2\pi^2} \displaystyle\int_{\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta) \left.\begin{matrix} \cos \mu\alpha \\ \sin \mu\alpha \end{matrix}\right| d\alpha\, d\beta; \qquad c_{\mu}^{o} = d_{\mu}^{o} = 0; \quad \mu = 1, 2, \ldots \\ \left.\begin{matrix} a_{o}^{\nu} \\ c_{o}^{\nu} \end{matrix}\right| = \dfrac{1}{2\pi^2} \displaystyle\int_{\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta) \left.\begin{matrix} \cos \nu\beta \\ \sin \nu\beta \end{matrix}\right| d\alpha\, d\beta; \qquad b_{o}^{\nu} = d_{o}^{\nu} = 0; \quad \nu = 1, 2, \ldots \\ \left.\begin{matrix} a_{\mu}^{\nu} \\ b_{\mu}^{\nu} \\ c_{\mu}^{\nu} \\ d_{\mu}^{\nu} \end{matrix}\right| = \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta) \left.\begin{matrix} \cos \mu\alpha \cos \nu\beta \\ \sin \mu\alpha \cos \nu\beta \\ \cos \mu\alpha \sin \nu\beta \\ \sin \mu\alpha \sin \nu\beta \end{matrix}\right| d\alpha\, d\beta; \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1, 2, \ldots \\ \nu = 1, 2, \ldots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Da s (x, y) immer eine in x und y periodische Funktion mit der Periode 2π darstellt, d. h. da

$$s(x + 2k\pi,\ y + 2l\pi) = s(x, y), \quad \text{wo} \begin{cases} k = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ l = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

so wollen wir das gleiche von f (x, y) voraussetzen.

Damit nun die Fouriersche Entwicklung einer Funktion überhaupt existiert, d. h. damit die Formeln (2) einen Sinn haben, muß f (x, y) folgende Bedingungen erfüllen:

1. Sie muß im Fundamentalquadrate

$$\begin{cases} -\pi < x \leqq +\pi \\ -\pi < y \leqq +\pi \end{cases}$$

eindeutig definiert sein,[1])

2. ihr über das Fundamentalquadrat erstrecktes Doppelintegral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha, \beta)\ d\alpha\, d\beta$$

muß existieren.

Wir wollen untersuchen, unter welchen von f (x, y) außerdem noch zu erfüllenden Bedingungen die Summe s (x, y) gleich f (x, y) ist. Zu diesem Zwecke summieren wir die Doppelreihe, und zwar zunächst im gewöhnlichen Sinne. Es ist:

$$(3)\quad \begin{cases} B_0^0 = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta \\ B_\mu^0 = \dfrac{1}{2\pi^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta) \left[\cos \mu\alpha \cos \mu x + \sin \mu\alpha \sin \mu x\right] d\alpha\, d\beta \\ \quad = \dfrac{1}{2\pi^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta) \cos \mu(\alpha - x)\, d\alpha\, d\beta; \qquad \mu = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

[1]) Ist der ursprüngliche Definitionsbereich von f (x, y) nicht das Fundamentalquadrat, sondern ein endlicher von regulären Kurven begrenzter, einfach oder mehrfach zusammenhängender Bereich, so kann man ihn immer mit einem Rechteck umgeben. In den nicht zum Bereich gehörigen Teilen dieses Rechtecks setze man f (x, y) = 0. Durch eine Ähnlichkeitstransformation läßt sich sodann das Rechteck auf das Fundamentalquadrat abbilden

$$
(3)\quad
\begin{cases}
B_0^\nu = \dfrac{1}{2\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\cos\nu(\beta-y)\,d\alpha\,d\beta; & \nu = 1, 2 \ldots \\
B_\mu^\nu = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\begin{bmatrix}(\cos\mu\alpha\cos\mu x + \sin\mu\alpha\sin\mu x)\cos\nu\beta\cos\nu y \\ +(\cos\mu\alpha\cos\mu x+\sin\mu\alpha\sin\mu x)\sin\nu\beta\sin\nu y\end{bmatrix} d\alpha\,d\beta \\
\quad = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\cos\mu(\alpha-x)\cos\nu(\beta-y)\,d\alpha\,d\beta; & \begin{cases}\mu = 1, 2, \ldots \\ \nu = 1, 2, \ldots\end{cases}
\end{cases}
$$

Die Summe der Terme, welche enthalten sind in dem von der $(m+1)^{ten}$ Kolonne rechts und von der $(n+1)^{ten}$ Zeile unten begrenzten rechteckigen Ausschnitt aus der Doppelreihe, bezeichnet man als die Fouriersche Partialsumme:

$$s_m^n(x, y) = \sum_0^m{}_\mu \sum_0^n{}_\nu' B_\mu^\nu (x, y).$$

Wegen der bekannten Relation:

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2} + \sum_1^p{}_\nu \cos\nu\varphi = \frac{\sin(p+\tfrac{1}{2})\varphi}{2\sin\tfrac{1}{2}\varphi}$$

erhält man:

$$
\begin{aligned}
s_m^n(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\Big[\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\Big\{\sum_1^m{}_\mu \cos\mu(\alpha-x) + \sum_1^n{}_\nu \cos\nu(\beta-y)\Big\} \\
+ \sum_1^m{}_\mu \cos\mu(\alpha-x)\sum_1^n{}_\nu \cos\nu(\beta-y)\Big]\,d\alpha\,d\beta
\end{aligned}
$$

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\Big[\tfrac{1}{2} + \sum_1^m{}_\mu \cos\mu(\alpha-x)\Big] \\
&\qquad\qquad \Big[\tfrac{1}{2} + \sum_1^n{}_\nu \cos\nu(\beta-y)\Big]\,d\alpha\,d\beta \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\,\frac{\sin(m+\tfrac{1}{2})(\alpha-x)}{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-x)}\,\frac{\sin(n+\tfrac{1}{2})(\beta-y)}{\sin\tfrac{1}{2}(\beta-y)}\,d\alpha\,d\beta.
\end{aligned}
$$

Die Entscheidung der Frage, ob die Doppelreihe $s(x, y)$ konvergiert, und ob ihre Summe für Punkte des Fundamentalquadrats mit $f(x, y)$ übereinstimmt, hängt dann lediglich ab von der Existenz bezw. Auswertung des Doppellimes:

$$\lim_{m,\,n\,=\,\infty} s_m^n(x,y)$$

$$\lim_{m,n} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta) \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\beta-y)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-y)}\, d\alpha\, d\beta.$$

Transformieren wir $s_m^n(x,y)$ durch die Substitutionen:

$$(6)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\alpha-x}{2}=\gamma;\ d\alpha=2\,d\gamma;\ \left[\alpha=\pi,\ \gamma=\dfrac{\pi-x}{2}\right]; \\ \qquad\qquad \left[\alpha=-\pi,\ \gamma=\dfrac{-\pi-x}{2}\right];\ 2m+1=\varkappa \\ \dfrac{\beta-y}{2}=\delta;\ d\beta=2\,d\delta;\left[\beta=\pi,\ \delta=\dfrac{\pi-y}{2}\right]; \\ \qquad\qquad \left[\beta=-\pi,\ \delta=\dfrac{-\pi-y}{2}\right];\ 2n+1=\lambda \end{array}\right|$$

so wird:

$$s_m^n(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi-x}^{\frac{\pi-x}{2}}\int_{-\pi-y}^{\frac{\pi-y}{2}} f(x+2\gamma,y+2\delta)\ \frac{\sin\varkappa\gamma}{\sin\gamma}\ \frac{\sin\lambda\delta}{\sin\delta}\ d\gamma\, d\delta.$$

Nun ist der Integrand dieses Doppelintegrals eine periodische Funktion, sowohl in γ als in δ, und beide Male mit der Periode π. Der Wert des Integrals bleibt also ungeändert, solange man als Integrationsbereich ein den Koordinatenaxen paralleles Quadrat von der Seitenlänge π benutzt. Ich kann daher schreiben:

$$s_m^n(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\gamma,y+2\delta)\ \frac{\sin\varkappa\gamma}{\sin\gamma}\ \frac{\sin\lambda\delta}{\sin\delta}\ d\gamma\, d\delta.$$

$$(7)\quad =\frac{1}{\pi^2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right\} f(\ )_{,,,}\, d\gamma\, d\delta$$

Setzt man im zweiten Integral:

$$\delta = -\delta'; \quad d\delta = -d\delta'; \quad \begin{bmatrix} \delta = 0 & , \ \delta' = 0 \\ \delta = -\frac{\pi}{2}, & \delta' = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

(8) im dritten

$$\gamma = -\gamma'; \quad d\gamma = -d\gamma'; \quad \begin{bmatrix} \gamma = 0 & , \ \gamma' = 0 \\ \gamma = -\frac{\pi}{2}, & \gamma' = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

und in das vierte beide Substitutionen gleichzeitig ein, so wird:

$$s_m^n(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\sin \gamma} \frac{\sin \gamma\delta}{\sin \delta} d\gamma\, d\delta, \text{ wo}$$

(9) $$F(x, y, 2\gamma, 2\delta) = f(x + 2\gamma, y + 2\delta) + f(x + 2\gamma, y - 2\delta) + f(x - 2\gamma, y + 2\delta) + f(x - 2\gamma, y - 2\delta).$$

Definieren wir:

(10) $$\varphi(\gamma, \delta) = \frac{\gamma}{\sin \gamma} \cdot \frac{\delta}{\sin \delta} \cdot F(x, y, 2\gamma, 2\delta)$$

so ergibt sich:

$$s_m^n(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, \delta) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} d\gamma\, d\delta,$$

ein Integral, welches nach bekanntem Vorbilde als Dirichletsches Doppelintegral bezeichnet werden möge.

Schließlich ist:

(11) $$s(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \lim_{\varkappa, \lambda = \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, \delta) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} d\gamma\, d\delta.$$

Letzterer Ausdruck, der als gewöhnlicher Doppellimes zu verstehen ist, stellt die Reihensumme im gewöhnlichen Sinne dar. Speziellere Summationsmethoden gibt es in Fülle, so diejenigen nach Zeilen, Kolonnen, Diagonalen, Quadraten. Da es im allgemeinen, wo es sich um bedingt konvergente Doppelreihen handelt, keine Beziehungen zwischen den Resultaten der verschiedenen Summationsmethoden gibt, so schien es mir nicht unnütz, diejenige nach Diagonalen ebenfalls zu untersuchen, weil sie in der

Theorie der Funktionen zweier complexen Variabeln eine Rolle spielt. Entwickelt man nämlich eine Funktion F (u, v) in der Umgebung des Nullpunktes nach dem Taylorschen Lehrsatz:

$$F(u,v) = F(0,0) + u\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right]_{(o,o)} + v\left.\frac{\partial F}{\partial v}\right]_{(o,o)} + \frac{1}{2!}\left\{u^2\left.\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right]_{(o,o)} + 2uv\left.\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\right]_{(o,o)} + v^2\left.\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right]_{(o,o)}\right\} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und untersucht Punkte der Konvergenzkreise[1]), so artet sowohl der reelle als imaginäre Teil dieser Taylorschen Reihe in eine nach Diagonalen summierte Fouriersche Reihe aus.

Sei $D_m(x, y)$ die Summe der ersten $(m + 1)$ Diagonalen der Doppelreihe (1), also:

$$D_m = \left|\begin{array}{l} B_o^o + B_1^o + \ldots\ldots\ldots + B_{m-1}^o + B_m^o \\ + B_o^1 + B_1^1 + \ldots\ldots\ldots + B_{m-1}^1 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + B_o^{m-1} + B_1^{m-1} \\ + B_o^m \end{array}\right.$$

$$= \sum_o^m{}_\nu \left(\sum_o^{m-\nu}{}_\mu B_\mu^\nu\right), \text{ so folgt aus (3)}$$

$$D_m(x, y) =$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\ \sum_o^m{}_\nu\ \left(\sum_o^{m-\nu}{}_\mu\ \cos\mu(\alpha-x)\cos\nu(\beta-y)\right) d\alpha\, d\beta,$$

wo in der Doppelsumme an Stelle von cos 0 immer $\frac{1}{2}$ zu setzen ist.

Wenden wir hierauf die Umformungen (6), (7) und (8) an, so wird:

$$D_m = \frac{4}{\pi^2}\int_0^2\int_0^2 F(x, y, 2\gamma, 2\delta)\ \triangle_m\, d\gamma\, d\delta, \text{ wo}$$

$$\triangle_m = \sum_o^m{}_\nu \left(\sum_o^{m-\nu}{}_\mu\ \cos 2\mu\gamma \cos 2\nu\delta\right)$$

$$= \sum_o^m{}_\nu\ \cos 2\nu\delta \cdot \frac{\sin(\varkappa-2\nu)\gamma}{2\sin\gamma}, \text{ infolge der Relation (4)}$$

[1]) Man hat sich die Konvergenzkreise durch Transformation der Reihe in die Einheitskreise übergeführt zu denken.

$$2\sin\gamma\,\triangle_m = \sum_1^m{}^{\nu}\cos 2\nu\delta\,(\sin\varkappa\gamma\cos 2\nu\gamma - \cos\varkappa\gamma\sin 2\nu\gamma) + \frac{1}{2}\sin\varkappa\gamma$$

$$4\sin\gamma\,\triangle_m = \sin\varkappa\gamma\left(\sum_1^m{}^{\nu}\,2\cos 2\nu\delta\cos 2\nu\gamma + 1\right) - \cos\varkappa\gamma\sum_1^m{}^{\nu}\,2\cos 2\nu\delta\sin 2\nu\gamma$$

$$\sin\varkappa\gamma\left(\sum_1^m{}^{\nu}[\cos 2\nu(\gamma+\delta) + \cos 2\nu(\gamma-\delta)] + 1\right) - \cos\varkappa\gamma\sum_1^m{}^{\nu}[\sin 2\nu(\gamma+\delta) + \sin 2\nu(\gamma-\delta)]$$

$$-\frac{\sin\varkappa\gamma}{2}\left[\frac{\sin\varkappa(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} + \frac{\sin\varkappa(\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)}\right] - \frac{\cos\varkappa\gamma}{2}\left[\frac{\cos(\gamma+\delta) - \cos\varkappa(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} + \frac{\cos(\gamma-\delta) - \cos\varkappa(\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)}\right]$$

wegen der zu (4) analogen Relation:

$$\sum_1^p{}^{\nu}\sin\nu\varphi = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos(p+\frac{1}{2})\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$8\sin\gamma\cdot\sin(\gamma+\delta)\cdot\sin(\gamma-\delta)\cdot\triangle_m$$

$$= \sin\varkappa\gamma[\sin\varkappa(\gamma+\delta)\cdot\sin(\gamma-\delta) + \sin\varkappa(\gamma-\delta)\cdot\sin(\gamma+\delta)]$$

$$+\cos\varkappa\gamma[\cos\varkappa(\gamma+\delta)\cdot\sin(\gamma-\delta) + \cos\varkappa(\gamma-\delta)\cdot\sin(\gamma+\delta) - \sin 2\gamma]$$

$$= \sin(\gamma-\delta)\cdot\cos\varkappa\delta + \sin(\gamma+\delta)\cdot\cos\varkappa\delta - \sin 2\alpha\cos\varkappa\gamma$$

$$= 2[\sin\gamma\cdot\cos\delta\cdot\cos\varkappa\delta - \sin\gamma\cdot\cos\gamma\cdot\cos\varkappa\gamma]$$

daher:

$$\triangle_m = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\varkappa\gamma\cdot\cos\gamma - \cos\varkappa\delta\cdot\cos\delta}{\cos 2\gamma - \cos 2\delta}$$

$$(12) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin(m+1)(\gamma+\delta)\cdot\sin(m+1)(\gamma-\delta) + \sin m(\gamma+\delta)\cdot\sin m(\gamma-\delta)}{\sin(\gamma+\delta)\cdot\sin(\gamma-\delta)}$$

Die m^{te} Partialsumme der Diagonalreihe in ihrer kürzesten Form ist also:

(13)

$$D_m(x,y) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x,y,2\gamma,2\delta)\,\frac{\cos\varkappa\gamma\cos\gamma - \cos\varkappa\delta\cos\delta}{\cos 2\gamma - \cos 2\delta}\,d\gamma\,d\delta,$$

wo $\varkappa = 2m+1$.

§ 2.

Das Dirichletsche Doppelintegral.

Wir wenden uns nun zur Auswertung des Doppellimes (11):

$$\lim_{\varkappa, \lambda = \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, \delta) \frac{\sin \varkappa \gamma \sin \lambda \delta}{\gamma \quad \delta} \, d\gamma \, d\delta \quad \lim_{\varkappa, \lambda = \infty} I(\varkappa, \lambda).$$

Es ist:

$$I(\varkappa, \lambda) = \left\{ \int_0^{a_0} \int_0^{d_0} + \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{d_0} + \int_0^{c_0} \int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{c_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \varphi \frac{\sin \varkappa \gamma \sin \lambda \delta}{\gamma \quad \delta} \, d\gamma \, d\delta$$

$$(14) \qquad = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$\text{wo } a_0 > c_0 > 0, \; d_0 > 0.$$

Unter der Voraussetzung, daß $\varphi(\gamma, \delta)$ in dem Bereich

$$0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \; ; \; 0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$$

endlich bleibt, d. h. $|\varphi(\gamma, \delta)| < G$, und ein über diesen Bereich erstrecktes Doppelintegral besitzt, beweisen wir die folgenden vier Hülfssätze.

1. Hülfssatz:

$$\lim_{\varkappa, \lambda = \infty} I_4(\varkappa, \lambda) = 0.$$

Beweis: Man denke sich den Bereich

$$c_0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \; ; \; d_0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$$

durch die Geraden:

$$\gamma = c_\mu ; \quad \delta = d_\nu ; \quad \begin{matrix} \mu = 1, 2 \ldots . (p-1) \\ \nu = 1, 2 \ldots . (q-1) \end{matrix}$$

in $p \cdot q$ Rechtecke eingeteilt, deren Seiten mit zunehmendem p und q unendlich klein werden. Zerlegt man das über jenen Bereich erstreckte Doppelintegral in die Summe der Integrale über die kleinen Rechtecke, so wird:

$$I_4(\varkappa, \lambda) = \sum_0^{p-1} \sum_0^{q-1} \int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}} \int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}} \varphi(\gamma, \delta) \frac{\sin \varkappa \gamma \sin \lambda \delta}{\gamma \quad \delta} \, d\gamma \, d\delta.$$

$$\text{wo } c_p = \frac{\pi}{2} \; ; \; d_q = \frac{\pi}{2}.$$

Führt man in jedes dieser Teilintegrale die ihm entsprechende Identität ein:

$$\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\cdot\delta}=\left[\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\delta}-\frac{\varphi(c_\mu,d_\nu)}{c_\mu\cdot d_\nu}\right]+\frac{\varphi(c_\mu,d_\nu)}{c_\mu\cdot d_\nu}$$

so folgt:

$$I_4(\varkappa,\lambda)=$$

$$\sum_0^{p-1}{}_\mu\sum_0^{q-1}{}_\nu\int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}}\int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}}\left[\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\cdot\delta}-\frac{\varphi(c_\mu,d_\nu)}{c_\mu\cdot d_\nu}\right]\sin\varkappa\gamma\sin\lambda\delta\,d\gamma\,d\delta$$

$$+\sum_0^{p-1}{}_\mu\sum_0^{q-1}{}_\nu\frac{\varphi(c_\mu,d_\nu)}{c_\mu\cdot d_\nu}\int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}}\int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}}\sin\varkappa\gamma\sin\lambda\delta\,d\gamma\,d\delta.$$

Bezeichnet D_μ^ν die Schwankung der Funktion $\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\cdot\delta}$ in dem Rechtecke

$$\left\{\begin{matrix}c_\mu\leqq\gamma\leqq c_{\mu+1}\\ d_\nu\leqq\delta\leqq d_{\nu+1}\end{matrix}\right\}$$

so ist für die Punkte dieses Rechtecks

$$\left|\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\cdot\delta}-\frac{\varphi(c_\mu,d_\nu)}{c_\mu\,d_\nu}\right|\leqq D_\mu^\nu,$$

und wegen der Endlichkeit von $\varphi(\gamma,\delta)$ folgt:

$$|I_4(\varkappa,\lambda)|<\sum_0^{p-1}{}_\mu\sum_0^{q-1}{}_\nu D_\mu^\nu\int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}}d\gamma\int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}}d\delta$$

$$+\frac{G}{c_0\,d_0}\sum_0^{p-1}{}_\mu\sum_0^{q-1}{}_\nu\int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}}\sin\varkappa\gamma\,d\gamma\int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}}\sin\lambda\delta\,d\delta.$$

Nun ist

$$\int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}}d\gamma\int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}}d\delta=(c_{\mu+1}-c_\mu)(d_{\nu+1}-d_\nu)=\varepsilon_\mu^\nu$$

= dem Flächeninhalt eines kleinen Rechtecks; da ferner $\varphi(\gamma,\delta)$, also auch $\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\cdot\delta}$ in dem betrachteten

Bereich ein Doppelintegral besitzt, so muß bei hinreichender Vergrößerung von p und q:

$$(15)\qquad \sum_{0}^{p-1}{}_{\mu}{}' \sum_{0}^{q-1}{}_{\nu}{}' D_{\mu\nu}{}' < \frac{\varepsilon_4}{2} \text{ gemacht werden können.}$$

$$\left| \int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}} \sin \varkappa\gamma \, d\gamma \int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}} \sin \lambda\delta \, d\delta \right|$$

$$= \frac{1}{\varkappa \cdot \lambda} \left| \left[\cos \varkappa\gamma \right]_{c_\mu}^{c_\mu+1} \left[\cos \lambda\delta \right]_{d_\nu}^{d_\nu+1} \right| < \frac{4}{\varkappa \cdot \lambda}$$

folglich: $$| I_4 (\varkappa, \lambda) | < \frac{\varepsilon_4}{2} + \frac{4G}{c_0 d_0} \cdot \frac{p\,q}{\varkappa\,\lambda}.$$

Nachdem nun p und q so groß fixiert sind, daß die Beziehung (15) erfüllt ist, kann man immer noch K_4 und Λ_4 um so viel größer wählen, daß

$$\frac{4G}{c_0 d_0} \cdot \frac{p\,q}{\varkappa \cdot \lambda} < \frac{\varepsilon_4}{2}$$

wird und bleibt für alle $\varkappa$, λ, welche K_4, Λ_4 überschreiten.

Folglich ist $| I_4 (\varkappa, \lambda) | < \varepsilon_4$ für $\begin{cases} \varkappa > K_4 \\ \lambda > \Lambda_4 \end{cases}$

d. h. $$\lim_{\varkappa, \lambda = \infty} I_4 (\varkappa, \lambda) = 0$$ Q. E. D.

Wir setzen nach Dirichlet:

$$\varphi (+0, \delta) - \lim_{\gamma = 0} \varphi (|\gamma|, \delta) \qquad \text{(bei festem } \delta)$$

und wollen analog unter $\varphi (+0, +0)$ den folgenden Doppellimes verstehen: $$\varphi (+0, +0) = \lim_{\gamma, \delta = 0} \varphi (|\gamma|, |\delta|).$$

2. Hülfssatz:

Existiert für jedes beliebig klein vorgeschriebene a_0 das Integral

$$\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi (\gamma, +0) \, d\gamma$$

und läßt sich zu jedem solchen a_0 ein $d > 0$ finden, derart, daß das Doppelintegral

$$\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{d} \frac{|\varphi (\gamma, \delta) - \varphi (\gamma, +0)|}{\delta} \, d\gamma \, d\delta = M_2 (d)$$

einen Sinn hat, so kann man durch hinreichende Verkleinerung von $d_0 < d$, erreichen, daß

$$|I_2(\varkappa, \lambda)| < \varepsilon_2 \text{ für alle } \begin{cases} \varkappa > K_2 \\ \lambda > \Lambda_2 \end{cases}$$

Beweis:

$$I_2 = \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^d \frac{\varphi(\gamma, \delta) - \varphi(\gamma, +0)}{\delta} \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \sin \lambda\delta \, d\gamma \, d\delta$$

$$+ \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, +0) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \, d\gamma \int_0^{d_0} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} \, d\delta.$$

Mit Hülfe der bekannten Formel:

$$\lim_{\lambda = \infty} \int_0^{d_0} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} \, d\delta = \int_0^{\infty} \frac{\sin \chi}{\chi} \, d\chi = \frac{\pi}{2} \tag{16}$$

erhält man

$$I_2 < \frac{1}{a_0} \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{d_0} \frac{\varphi(\gamma, \delta) - \varphi(\gamma, +0)}{\delta} \, d\gamma \, d\delta$$

$$+ \left| \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, +0) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \, d\gamma \right| \cdot \left| \frac{\pi}{2} + \varepsilon_\lambda \right|$$

$$< \frac{1}{a_0} M_2(d_0) + R_\varkappa \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \text{ für } \lambda > \Lambda_2.$$

Nun ist $M_2(d_0) < \frac{a_0}{2} \varepsilon_2$ für hinreichend kleines d_0, weil a_0 fest bleibt. Da ferner $\varphi(\gamma, +0)$ endlich und integrabel ist, kann, nach der Beweismethode von Hülfssatz 1, durch Vergrößerung von $\varkappa$ $R_\varkappa < \frac{\varepsilon_2}{\pi + 2}$ gemacht werden[1]),

darum $\left| I_2(\varkappa, \lambda) \right| < \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2} = \varepsilon_2$ für $\begin{cases} \varkappa > K_2 \\ \lambda > \Lambda_2 \end{cases}$

Q. E. D.

[1]) Vergleiche Pringsheim, Math. Ann. 68, p. 380.

In derselben Weise zeigt man die Richtigkeit des

3. Hülfssatzes:

Existiert für jedes beliebig klein vorgeschriebene d_0 das Integral

$$\int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\,(+0,\,\delta)\,\mathrm{d}\,\delta$$

und läßt sich zu jedem solchen d_0 ein $c > 0$ finden, derart, daß das Doppelintegral

$$\int_0^c \int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\varphi\,(\gamma\cdot\delta) - \varphi\,(+0,\delta)}{\gamma} \right| \mathrm{d}\,\gamma\,\mathrm{d}\,\delta = M_3 \quad (c)$$

existiert, so kann man durch Verkleinerung von $c_0 < c$ stets erreichen, daß

$$|\,I_3\,(\varkappa,\lambda)\,| < \varepsilon_3 \text{ für alle } \varkappa > K_3,\ \lambda > \Lambda_3.$$

4. Hülfssatz:

Existiert $\varphi\,(+0,+0)$ und ist $\varphi\,(\gamma,\delta)$ mit beliebigem Vorzeichen für jedes γ des Intervalls $0 < \gamma < a_0$ in δ monoton abnehmend, ebenso für jedes δ des Intervalls $0 < \delta < d_0$ in γ monoton abnehmend, so wird bei hinreichender Verkleinerung von a_0 und d_0

$$\left| I_1\,(\varkappa,\lambda) - \frac{\pi^2}{4}\,\varphi\,(+0,+0) \right| < \varepsilon_1 \quad \text{falls } \varkappa > K_1,\ \lambda > \Lambda_1$$

Beweis:

$$I_1\,(\varkappa,\lambda) - \frac{\pi^2}{4}\,\varphi\,(+0,+0)$$

$$= \int_0^{a_0}\int_0^{d_0} \left\{ \varphi\,(\gamma,\delta) - \varphi\,(a_0,d_0) \right\} \frac{\sin\varkappa\gamma}{\gamma}\,\frac{\sin\lambda\delta}{\delta}\,\mathrm{d}\,\gamma\,\mathrm{d}\,\delta$$

$$+ \left\{ \varphi\,(a_0,d_0) - \varphi\,(+0,+0) \right\} \frac{\pi^2}{4}$$

$$- \varphi\,(a_0,d_0) \left\{ \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{a_0} \frac{\sin\varkappa\gamma}{\gamma}\,\mathrm{d}\,\gamma \int_0^{d_0} \frac{\sin\lambda\delta}{\delta}\,\mathrm{d}\,\delta \right\}$$

Setzt man: $\psi\,(\gamma,\delta) = \varphi\,(\gamma,\delta) - \varphi\,(a_0,d_0),$

so ist $\psi\,(+0,+0) = \varphi\,(+0,+0) - \varphi\,(a_0,d_0)$ und

$$\left| I_1 - \frac{\pi^2}{4}\varphi(+0,+0)\right| < \left|\int_0^{a_0}\int_0^{d_0} \psi(\gamma,\delta)\,\frac{\sin\varkappa\gamma}{\gamma}\,\frac{\sin\lambda\delta}{\delta}\,d\gamma\,d\delta\right|$$

(17)
$$+\frac{\pi^2}{4}\psi(+0,+0) + G.N(\varkappa,\lambda)$$
$$< \left|J\right| + \frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_1}{3},$$

da $N(\varkappa,\lambda)$, nachdem a_0, d_0 hinreichend klein fixiert sind, um $\psi(+0,+0) < \frac{4\varepsilon_1}{3\pi^2}$ zu machen, wegen (16) noch unter jede endliche Schranke hinabgedrückt werden kann.

$$J = \int_0^{a_0}\int_0^{d_0} \psi(\gamma,\delta)\,\frac{\sin\varkappa\gamma}{\gamma}\,\frac{\sin\lambda\delta}{\delta}\,d\gamma\,d\delta$$

und $\psi(\gamma,\delta)$ eine positive, gleichsinnig monoton abnehmende Funktion. Ich zerlege J in die folgenden Teilintegrale:

$$J = \sum_1^m{}_\mu \sum_1^n{}_\nu (-1)^{\mu+\nu}\cdot u_\mu^\nu + \sum_1^m{}_\mu (-1)^{\mu+n+1}\cdot \ominus_\mu \cdot u_\mu^{n+1}$$
$$+ \sum_1^n{}_\nu (-1)^{\nu+m+1}\cdot \ominus^{(\nu)}\cdot u_{m+1}^\nu + (-1)^{m+n}\cdot \ominus \cdot u_{m+1}^{n+1},$$

wo
$$u_i^l = \int_{(i-1)\frac{\pi}{\varkappa}}^{i\frac{\pi}{\varkappa}} d\gamma \int_{(l-1)\frac{\pi}{\lambda}}^{l\frac{\pi}{\lambda}} \psi(\gamma,\delta)\,\frac{\sin\varkappa\gamma}{\gamma}\,\frac{\sin\lambda\delta}{\delta}\,d\delta$$

zu setzen ist und m und n so bestimmt werden, daß

$$\frac{m\pi}{\varkappa} \leq a_0 \leq \frac{(m+1)\pi}{\varkappa}; \qquad \frac{n\pi}{\lambda} \leq d_0 \leq \frac{(n+1)\pi}{\lambda},$$

während die $\ominus$ sämtlich zwischen 0 und 1 liegen.

Transformiert man u_i^l durch die Substitutionen:

(18) so wird
$$\left|\begin{array}{l} \varkappa\gamma = \alpha + (i-1)\pi; \quad d\gamma = \dfrac{d\alpha}{\varkappa} \\ \lambda\delta = \beta + (l-1)\pi; \quad d\delta = \dfrac{d\beta}{\lambda} \end{array}\right|$$

$$u_i^l = \int_0^\pi\int_0^\pi \psi\left(\frac{\alpha+(i-1)\pi}{\varkappa}, \frac{\beta+(l-1)\pi}{\lambda}\right) \frac{\sin\alpha}{\alpha+(i-1)\pi}\,\frac{\sin\beta}{\beta+(l-1)\pi}\,d\alpha\,d\beta.$$

Wegen der Monotonie von ψ ist sofort ersichtlich, daß auch die u_i^l mit wachsendem i und l gleichsinnig monoton abnehmen. Schreiben wir nun:

$$\begin{aligned}
J = {} & u_1^1 - u_1^2 + u_1^3 - u_1^4 + u_1^5 - \ldots\ldots + (-1)^n \ominus_1 u_1^{n+1} \\
& - u_2^1 + u_2^2 - u_2^3 + u_2^4 - u_2^5 + \ldots\ldots + (-1)^{n+1} \ominus_2 u_2^{n+1} \\
& + u_3^1 - u_3^2 + u_3^3 - u_3^4 + u_3^5 - \ldots\ldots + (-1)^{n+2} \ominus_3 u_3^{n+1} \\
& - u_4^1 + u_4^2 - u_4^3 + u_4^4 - u_4^5 + \ldots\ldots + (-1)^{n+3} \ominus_4 u_4^{n+1} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-1)^m \ominus^{(1)} u_{m+1}^1 + (-1)^{m+1} \ominus^{(2)} u_{m+1}^2 + \ldots\ldots\ldots \\
& \qquad + (-1)^{m+n} \ominus \cdot u_{m+1}^{n+1}
\end{aligned}$$

und setzen:

$$Z_i = u_i^i - u_i^{i+1} + u_i^{i+2} - \ldots + (-1)^{n+i} \ominus_i u_i^{n+1}$$

$$C_i = -u_{i+1}^i + u_{i+2}^i - u_{i+3}^i + \ldots + (-1)^{m+i} \ominus^{(i)} u_{m+1}^i$$

so ist

$$J = Z_1 + C_1 + Z_2 + C_2 + \ldots\ldots = \sum_i (Z_i + C_i).$$

Wegen der Monotonie von u_i^l bestehen die Ungleichungen

$$u_i^i - u_i^{i+1} < Z_i < u_i^i$$

$$-u_{i+1}^i < C_i < -u_{i+1}^i + u_{i+2}^i$$

$$\sum_i (u_i^i - u_i^{i+1}) - \sum_i u_{i+1}^i < J < \sum_i u_i^i - \sum_i (u_{i+1}^i - u_{i+2}^i)$$

$$-\sum_i u_{i+1}^i > J < \sum_i u_i^i$$

$$-\sum_i u_{i+1}^i \quad \sum_i u_i^i + \sum_i (u_i^i - u_{i+1}^i) > -\sum_i u_i^i$$

folglich

$$-\sum_i u_i^i < J < \sum_i u_i^i$$

d. h. $|J| < \sum_i u_i^i$, denn die u_i^l sind positiv.

Nun ist gemäß (18):

$$u_1^1 < \psi(+0,+0) \int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha \int_0^{\pi} \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta < \pi^2\,\psi(+0,+0)^{1})$$

und für $i > 1$

$$u_i^i < \psi(+0,+0) \cdot \frac{1}{(i-1)^2}$$

$$\therefore \quad \sum_i u_i^i < \psi(+0,+0)\left\{\pi^2 + \sum_2^q i \frac{1}{(i-1)^2}\right\}$$

Letztere Reihe konvergiert absolut. Bezeichnen wir ihre Summe mit σ, so bleibt die Klammergröße kleiner als $\pi^2+\sigma$, wie groß auch q ausfallen mag, das mit $\varkappa$ und λ wächst. Es muß also durch passende Wahl von a_0, d_0 gelingen, $\psi(+0,+0)$ $\varphi(+0,+0) - \varphi(a_0, d_0)$ so zu verkleinern, daß:

$$|J| < \sum_i u_i^i < \frac{\varepsilon_1}{3} \quad \text{wird, unabhängig von } \varkappa \text{ und } \lambda.$$

Führen wir dieses Resultat in (17) ein, so ergibt sich:

$$\left| I_1(\varkappa,\lambda) - \frac{\pi^2}{4}\,\varphi(+0,+0)\right| < \varepsilon_1, \quad \text{falls} \begin{cases} \varkappa > K_1 \\ \lambda > \Lambda_1 \end{cases}$$

Q. E. D.

Zusatz:

Hülfssatz 4 gilt auch dann noch, wenn $\varphi(\gamma,\delta)$ eine gleichsinnig monoton zunehmende Funktion ist, oder sich als Summe zweier Funktionen darstellen läßt, wovon die eine gleichsinnig monoton abnimmt, die andere zunimmt.

Denn ist $\varphi(\gamma,\delta)$ zunehmend, so ist $[-\varphi(\gamma,\delta)]$ abnehmend und die obige Beweismethode läßt sich hierauf anwenden. Zusammenfassend können wir als Ergebnis dieses Paragraphen folgenden Hauptsatz über das Dirichletsche Integral aussprechen:

„Ist $\varphi(\gamma,\delta)$ im Bereich

$$0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}\,;\; 0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{endlich,}$$

und existieren in diesem Bereich die Grenzwerte:

$$\varphi(+0,\delta),\ \varphi(\gamma,+0),\ \varphi(+0,+0);$$

[1]) Man hat immer:

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \pi, \quad \text{für jedes } a \geq 0, \quad b \leq \infty$$

sowie die Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, \delta)\, d\gamma\, d\delta, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, +0)\, d\gamma, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(+0, \delta)\, d\delta;$$

kann ich ferner:

A) für jedes beliebig klein vorgeschriebene a_0 ein d so klein finden, daß

$$\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{d} \frac{|\varphi(\gamma, \delta) - \varphi(\gamma, +0)|}{\delta} d\gamma\, d\delta$$

endlich bleibt;

B) für jedes beliebig klein vorgeschriebene d_0 ein c so klein bestimmen, daß

$$\int_0^{c} \int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\varphi(\gamma, \delta) - \varphi(+0, \delta)|}{\gamma} d\gamma\, d\delta \text{ endlich bleibt;}$$

C) a_0 und d_0 so klein wählen, daß im Bereich

$$\left.\begin{matrix} 0 < \gamma \leq a_0 \\ 0 < \delta \leq d_0 \end{matrix}\right\}$$

$\varphi(\gamma, \delta)$ als Summe zweier Funktionen dargestellt werden kann, wovon die eine gleichsinnig monoton ab-, die andere zunimmt, so ist:

$$\lim_{\varkappa, \lambda = \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, \delta) \frac{\sin \varkappa \gamma}{\gamma} \cdot \frac{\sin \lambda \delta}{\delta} d\gamma\, d\delta = \frac{\pi^2}{4} \varphi(+0, +0).$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Zerlegung (14) unter Anwendung der Hülfssätze 1 ... 4. Denn sind

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \frac{\varepsilon}{4}$$

beliebig klein vorgeschrieben, so kann ich:

$$\left| I(\varkappa, \lambda) - \frac{\pi^2}{4} \varphi(+0, +0) \right|$$

$$\leq \left| I_1(\varkappa, \lambda) - \frac{\pi^2}{4} \varphi(+0, +0) \right| + |I_2| + |I_3| + |I_4|$$

$$< \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

$$< \varepsilon \quad \text{machen, für } \varkappa > K,\ \lambda > \Lambda$$

durch passende Wahl der Größen a_0, c_0, d_0, K_i, $\mathcal{A}_i$ $(i = 1..4)$. Hier bedeutet $K, \mathcal{A}$ ein Zahlenpaar, welches entsprechend größer ist als jedes der Paare K_i, $\mathcal{A}_i$.

Die Ungleichung

$$\left| I(\varkappa, \lambda) - \frac{\pi^2}{4} \varphi(+0, +0) \right| < \varepsilon$$

besagt aber nichts anderes als

$$\lim_{\varkappa, \lambda} I(\varkappa, \lambda) = \frac{\pi^2}{4} \varphi(+0, +0)$$

Q. E. D.

§ 3.

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Doppelreihe im gewöhnlichen Sinne.

Um aus der Diskussion des Dirichlet'schen Doppelintegrals die Nutzanwendung auf das Summationsintegral der Fourierschen Doppelreihe zu ziehen, hatten wir in (10):

$$\varphi(\gamma, \delta) = F(x, y, 2\gamma, 2\delta) \cdot \frac{\gamma}{\sin\gamma} \cdot \frac{\delta}{\sin\delta} \text{ gesetzt.}$$

Es fragt sich nun, welche Bedingungen muß $f(x, y)$, resp. $F(x, y, 2\gamma, 2\delta)$, erfüllen, damit $\varphi(\gamma, \delta)$ den Forderungen des Hauptsatzes über das Dirichletsche Integral genüge?

Da $\lim_{\gamma, \delta = +0} \left\{ \frac{\gamma}{\sin\gamma} \cdot \frac{\delta}{\sin\delta} \right\} = 1$

ist, so zieht die Bedingung der Endlichkeit und Integrabilität von $\varphi(\gamma, \delta)$ diejenige von $F(x, y, 2\gamma, 2\delta)$, resp. $f(x, y)$, nach sich.

Ferner ist:

$$\frac{\varphi(\gamma,\delta)-\varphi(\gamma+0)}{\delta}=\frac{\gamma}{\sin\gamma}\left\{\frac{F(x,y,2\gamma,2\delta)}{\sin\delta}-\frac{F(x,y,2\gamma,+0)}{\delta}\right\}$$

$$=\frac{\gamma}{\sin\gamma}\left\{F(x,y,2\gamma,2\delta)\left(\frac{1}{\sin\delta}-\frac{1}{\delta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{F(x,y,2\gamma,2\delta)-F(x,y,2\gamma,+0)}{\delta}\right\}$$

also:

$$\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{d}\frac{|\varphi(\gamma,\delta)-\varphi(\gamma,+0)|}{\delta}\,d\gamma\,d\delta<\frac{a_0}{\sin a_0}\left\{G\left|\int_{0}^{d}\left(\frac{1}{\sin\delta}-\frac{1}{\delta}\right)d\delta\right|\right.$$

$$\left.+\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{d}\frac{|F(x,y,2\gamma,2\delta)-F(x,y,2\gamma,+0)|}{\delta}\,d\gamma\,d\delta\right\}$$

$$\int_{0}^{d}\left(\frac{1}{\sin\delta}-\frac{1}{\delta}\right)d\delta=\lim_{\varepsilon=0}\left[\lg\frac{\tan\frac{\delta}{2}}{\delta}\right]_{\varepsilon}^{d}=\lg\left(\frac{\tan\frac{d}{2}}{d}\right)-\lg\frac{1}{2},$$

bleibt daher $\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{d}\frac{|F(2\gamma,2\delta)-F(2\gamma,+0)|}{\delta}\,d\gamma\,d\delta$ endlich, so ist Bedingung A) erfüllt. Ebenso Bedingung B), falls

$$\int_{0}^{c}\int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|F(2\gamma,2\delta)-F(+0,2\delta)|}{\gamma}\,d\gamma\,d\delta \quad \text{endlich ausfällt.}$$

Bedingung C) ist befriedigt, wenn $F(x,y,2\gamma,2\delta)$ sich in einer hinreichend kleinen Nachbarschaft von (x,y) in die Summe zweier Funktionen F_1 und F_2 zerlegen läßt, deren erste gleichsinnig monoton zu- die zweite abnimmt. Um dies einzusehen, schreiben wir:

$$\varphi=(F_1+F_2)\frac{\gamma}{\sin\gamma}\frac{\delta}{\sin\delta}=\varphi_1+\varphi_2$$

$$=(F_1+C)\frac{\gamma}{\sin\gamma}\frac{\delta}{\sin\delta}+(F_2-C)\frac{\gamma}{\sin\gamma}\frac{\delta}{\sin\delta},$$

wo C so groß gewählt sei, daß φ_1 immer positiv, φ_2 immer negativ bleibt. Da $\frac{\gamma}{\sin\gamma} \cdot \frac{\delta}{\sin\delta}$ im betrachteten Bereich positiv ist und in beiden Variabeln gleichsinnig monoton wächst, so können wir für φ_1 und φ_2 die vorher über F_1 und F_2 gemachten Aussagen wiederholen. $\varphi(\gamma, \delta)$ genügt also unter obigen Voraussetzungen über $F(x, y, 2\gamma, 2\delta)$ bezw. $f(x, y)$ sämtlichen Anforderungen des Hauptsatzes § 2, und wir erhalten unter Anwendung auf (11):

$$s(x,y) = \lim_{m,\,n=\infty} s_m^n(x,y) = \frac{1}{\pi^2} \lim_{\varkappa,\lambda=\infty} I(\varkappa,\lambda) = \frac{1}{4}\varphi(+0,+0)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\gamma,\delta=0} \left\{ \frac{|\gamma|}{\sin|\gamma|} \cdot \frac{|\delta|}{\sin|\delta|} F(x, y, 2|\gamma|, 2|\delta|) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} F(x, y, +0, +0)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\gamma,\delta=0} \Big\{ f(x+|\gamma|, y+|\delta|) + f(x+|\gamma|, y-|\delta|) + f(x-|\gamma|, y+|\delta|) + f(x-|\gamma|, y-|\delta|) \Big\}$$

Zusammenfassend ergibt sich folgender Satz über die Entwicklung einer Funktion von zwei Variabeln in eine Fouriersche Doppelreihe:

Lehrsatz:

„Ist f (x, y) eine in x und y mit 2π periodische, endliche und im Fundamentalquadrat

$$\left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq x \leq \pi \\ -\pi \leq y \leq \pi \end{array} \right\}$$

integrable Funktion, und definiert man:

$$F(x, y, \gamma, \delta) \quad f(x+\gamma, y+\delta) + f(x+\gamma, y-\delta) + f(x-\gamma, y+\delta) + f(x-\gamma, y-\delta)$$

so konvergiert die Fouriersche Doppelreihenentwicklung von $f(x, y)$

$$s(x,y) = \sum_0^\infty \mu, \nu \left[(a_\mu^\nu \cos\mu x + b_\mu^\nu \sin\mu x)\cos\nu y + (c_\mu^\nu \cos\mu x + d_\mu^\nu \sin\mu x)\sin\nu y \right]$$

gegen den Grenzwert:

$$\frac{1}{4} F(x, y, +0, +0) = \frac{1}{4} \lim_{\gamma,\delta=0} F(x, y, \gamma, \delta)$$

in jedem Punkte (x, y), wo folgende Bedingungen erfüllt sind:

(H_1) Es existieren die Grenzwerte: $F(x, y, +0, +0)$, $F(x, y, +0, \delta)$, $F(x\ y, \gamma, +0)$ für $0 \leqq \gamma \leqq \pi$, $0 \leqq \delta < \pi$, sowie die Integrale:

$$\int_0^{\pi} F(x, y, +0, \delta)\, d\delta \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} F(x, y, \gamma, +0)\, d\gamma.$$

(H_2) Man kann für jedes beliebig klein vorgeschriebene a_0 ein d so klein finden, daß

$$\int_{a_0}^{\pi} \int_0^{d} \frac{F(x, y, \gamma, \delta) - F(x, y, \gamma, +0)}{\delta} \Big| d\gamma\, d\delta$$

endlich bleibt;

(H_3) für jedes beliebig klein vorgeschriebene d_0 ein c so klein angeben, daß

$$\int_0^{c} \int_{d_0}^{\pi} \frac{F(x, y, \gamma, \delta) - F(x, y, +0, \delta)}{\gamma} \Big| d\gamma\, d\delta$$

endlich bleibt;

(H_4) a_0 und d_0 so klein bestimmen, daß $F(x, y, \gamma, \delta)$ in dem Bereich $\begin{cases} 0 < \gamma \leqq a_0 \\ 0 < \delta \leqq b_0 \end{cases}$ monotonoid ist, d. h. in die Summe zweier Funktionen zerlegt werden kann, von denen die eine nach beiden Axenrichtungen monoton zunimmt, die andere abnimmt."

Das Auftreten der Bedingungen H_2 und H_3 lehrt, daß die Entwickelbarkeit einer Funktion nicht nur von ihrem Verhalten in der unmittelbaren Umgebung des betrachteten Punktes abhängt, wie bei Funktionen von einer Variablen, sondern daß auch ihr Betragen in der Nähe des durch den Punkt gehenden Axenkreuzes in Frage kommt.

An Stelle von H_2 und H_3 hätten auch andere Bedingungen gesetzt werden können, welche gewisse Monotonie-Eigenschaften von $f(x, y)$ verlangen, ähnlich wie H_4, doch schienen mir H_2 und H_3 ebenso weitreichend und interessanter, weil sie das einzig

brauchbare sind, was man von der „Dini“schen Bedingung für Funktionen einer Variablen in die Theorie der Fourierschen Doppelreihen hinübernehmen kann. An die Stelle von H_4 würde man nämlich, dem Vorgange Dinis folgend, die Bedingung:

$$\int_0^a \int_0^b \left| \underset{\gamma, \delta}{F(\gamma, \delta) - F(+0, +0)} \right| d\gamma\, d\delta \text{ bleibt endlich}$$

zu setzen haben. Diese verlangt aber schon im einfachsten Fall, dem der analytischen Funktion, das Verschwinden aller Differentialquotienten von höherer als der ersten Ordnung, wie man durch eine Anwendung des Taylorschen Satzes auf

$$\{F(x, y, \gamma, \delta) - F(x, y, +0, +0)\}$$

leicht sieht. Danach dürfte $f(x, y)$ nur eine lineare Funktion sein, was ein trivialer Fall.

Im Anschluß an H_4 will ich noch zeigen, daß die gewöhnlicheren Funktionen, welche nach beiden Axenrichtungen monoton, aber nicht gleichsinnig monoton sind, doch noch monotonoid sind.

Sei beispielsweise $f(x, y)$ nach der X-Richtung monoton abnehmend, nach der Y-Richtung zunehmend, so gelten für alle $x, y, x + h, x + k$ des Bereichs

$$\begin{cases} x_0 \leq x < x + h \leq x_0 + a \\ y_0 \leq y < y + k \leq y_0 + b \end{cases}$$

die Ungleichungen:

$$f(x + h, y) - f(x, y) \leq 0; \qquad f(x, y + k) - f(x, y) > 0.$$

Es sei nun $\frac{\partial f}{\partial y}$ in jedem Punkte endlich und kleiner als $A - \delta$, ferner mögen die zweiten Differentialquotienten endlich bleiben. Definiere ich $F(y) = A y$, so ist diese Funktion monoton zunehmend, $f(x, y) - F(y) = \psi(x, y)$ ist aber monoton abnehmend, denn:

$$\psi(x + h, y + k) - \psi(x, y)$$

$$= f(x + h, y + k) - F(y + k) - f(x, y) + F(y)$$

$$= f(x + h, y + k) - f(x, y + k) + \left\{ \left(f(x, y + k) - f(x, y) \right) - \left(F(y + k) - F(y) \right) \right\}$$

$$\leq 0,$$

da $f(x, y+k) - f(x, y) = k \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{k^2}{2!} M$, wo M endlich ist

$$F(y+k) - F(y) = k \cdot A$$

$$f(x, y+k) - f(x, y) - F(y+k) + F(y) = k \left(\frac{\partial f}{\partial y} - A + \frac{k M}{2} \right) < 0,$$

$$\text{wenn } 0 < k < \frac{2\delta}{M}.$$

Somit ist $f(x, y) = \psi(x, y) + F(y)$ als Summe zweier entgegengesetzt monotoner Funktionen dargestellt, ist also monotonoid.

§ 4.

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Diagonalreihe.

In § 1, Gleichung (13) fanden wir für die m^{te} Partialsumme der Diagonalreihe den Ausdruck:

$$Dm(x, y) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta) \frac{\cos \varkappa\gamma \cos\gamma - \cos \varkappa\delta \cos\delta}{\cos 2\gamma - \cos 2\delta} d\gamma d\delta$$

oder mit Hülfe von (12)

$$Dm(x, y) =$$

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(2\gamma, 2\delta) \frac{\sin(m+1)(\gamma+\delta)\sin(m+1)(\gamma-\delta) + \sin m(\gamma+\delta)\sin m(\gamma-\delta)}{\sin(\gamma+\delta)\sin(\gamma-\delta)} d\gamma d\delta$$

In beiden Fällen verschwindet der Nenner für $\gamma = \delta$. Die Umgebung dieser Linie verlangt daher eine genauere Untersuchung. Wir führen die Substitution ein:

$$\begin{cases} \delta + \gamma = \xi; & \gamma = \frac{\xi - \eta}{2}; \\ \delta - \gamma = \eta; & \delta = \frac{\xi + \eta}{2}; \end{cases} \quad \left| \begin{matrix} \frac{\partial\gamma}{\partial\xi} & \frac{\partial\gamma}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\delta}{\partial\xi} & \frac{\partial\delta}{\partial\eta} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}$$

Diese bedeutet geometrisch eine Rotation des Bezugsaxenkreuzes um 45°: $\begin{cases} \delta + \gamma = \alpha\sqrt{2} \\ \delta - \gamma = \beta\sqrt{2} \end{cases}$, verbunden mit einer Vergrößerung im Verhältnis $\frac{\sqrt{2}}{1}$; $\begin{cases} \alpha\sqrt{2} = \xi \\ \beta\sqrt{2} = \eta \end{cases}$

Die Integrationsgrenzen sind aus der Figur leicht zu entnehmen:

$$D_m(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\xi}^{+\xi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{-\pi+\xi}^{\pi-\xi}\right\} F(\xi-\eta, \xi+\eta)\,\frac{\sin(m+1)\xi\,\sin(m+1)\eta + \sin m\xi\,\sin m\eta}{\sin\xi\cdot\sin\eta}\,d\xi\,d\eta$$

$$D_m(x,y) \quad \frac{1}{2\pi^2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\xi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\pi-\xi}\right\} [F(\xi-\eta, \xi+\eta) + F(\xi+\eta, \xi-\eta)]\,\frac{\sin(m+1)\xi\,\sin(m+1)\eta + \sin m\xi\,\sin m\eta}{\sin\xi\cdot\sin\eta}\,d\xi\,d\eta$$

$$D_m(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\xi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\pi-\xi}\right\} \varphi(\xi,\eta)\left[\frac{\sin(m+1)\xi}{\xi}\,\frac{\sin(m+1)\eta}{\eta} + \frac{\sin m\xi}{\xi}\,\frac{\sin m\eta}{\eta}\right] d\xi\,d\eta$$

wenn wir $\varphi(\xi,\eta) = \frac{\xi}{\sin\xi}\cdot\frac{\eta}{\sin\eta}[F(\xi-\eta, \xi+\eta) + F(\xi+\eta, \xi-\eta)]$ setzen.

Dies sind wieder Integrale von der Natur des Dirichletschen. Wie zuvor können wir $D_m(x,y)$ in drei wesentlich verschiedene Gattungen von Teilintegralen zerlegen:

$$2\pi^2 D_m = \int_0^{a_0}\int_0^{\xi} + \int_{a_0}^{\pi-a_0}\int_0^{a_0} + \int_{\pi-a_0}^{\pi}\int_0^{\pi-\xi} + \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a_0}^{\xi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{a_0}^{\pi-\xi}$$

$$= D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5$$

Hier ist a_0 eine positive beliebig zu verkleinernde Konstante.

$$D_1 = \int_0^{a_0}\int_0^{\xi} \varphi(\xi,\eta)\,\frac{\sin(m+1)\xi}{\xi}\,\frac{\sin(m+1)\eta}{\eta}\,d\xi\,d\eta + \int_0^{a_0}\int_0^{\xi} \varphi(\xi,\eta)\,\frac{\sin m\xi}{\xi}\,\frac{\sin m\eta}{\eta}\,d\xi\,d\eta$$

gleicht im Charakter ganz dem früher im 4. Hülfssatz besprochenen Integral $I_1(\varkappa,\lambda)$. Man beweist leicht unter derselben Voraussetzung wie dort, wonach $\varphi(\xi,\eta)$ in der Umgebung von $(0,0)$ in entgegengesetzt monotone Komponenten zerlegbar sein soll [1]), daß

$$\left| D_1 - \frac{\pi^2}{4}\,\overline{\varphi}(+0,+0) \right| < \varepsilon_1 \tag{19}$$

für ein hinreichend klein gewähltes a_0 und $m > M_1$.

Der hierbei auftretende Grenzwert:

$$\lim_{p=\infty} \int_0^{a_0}\int_0^{\xi} \frac{\sin p\xi}{\xi}\,\frac{\sin p\eta}{\eta}\,d\xi\,d\eta$$ geht durch die Substitutionen

$$\begin{cases} p\eta = y \\ p\xi = x \end{cases} \qquad \text{über in} \int_0^{\infty}\int_0^{x} \frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \frac{\pi^2}{8},$$

weswegen

$$\lim_{m=\infty} \int_0^{a_0}\int_0^{\xi} \left[\frac{\sin(m+1)\xi}{\xi}\,\frac{\sin(m+1)\eta}{\eta} + \frac{\sin m\xi}{\xi}\,\frac{\sin m\eta}{\eta} \right] d\xi\,d\eta$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

Unter dem in (19) auftretenden Symbol $(\overline{\varphi}+0,+0)$ ist folgender Grenzwert zu verstehen:

$$\overline{\varphi}(+0,+0) = \lim_{\xi,\eta=+0} \varphi(\xi,\eta) \text{ mit der Nebenbedingung:}$$

$$0 \le \eta \le \xi$$

[1]) Deren jede für sich nach beiden Axenrichtungen ξ, η gleichsinnig monoton ist.

Ebenso wie D_1 nimmt auch

$$D_3 = \int_{\pi-\alpha_0}^{\pi} \int_{0}^{\pi-\xi} \Big[F(\xi-\eta, \xi+\eta) + F(\xi+\eta, \xi-\eta)\Big] \frac{\sin(m+1)\xi \sin(m+1)\eta + \sin m\xi \sin m\eta}{\sin\xi \sin\eta} \, d\xi \, d\eta$$

durch die Transformation: $\xi = \pi - \xi'$; $d\xi = -d\xi'$ eine zu $I_1(\varkappa, \lambda)$ analoge Gestalt an:

$$D_3 = \int_0^{a_0} \int_0^{\xi} \Big\{ F(\pi-\xi-\eta, \pi-\xi+\eta) + F(\pi-\xi+\eta, \pi-\xi-\eta) \Big\} \cdot \Big\{ \frac{(-1)^m \sin(m+1)\xi \sin(m+1)\eta}{\sin\xi \sin\eta} + \frac{(-1)^{m+1} \sin m\xi \sin m\eta}{\sin\xi \sin\eta} \Big\} d\xi \, d\eta$$

$$= (-1)^m \int_0^{a_0} \int_0^{\xi} \Big\{ F(\pi-\xi-\eta, \pi-\xi+\eta) + F(\pi-\xi+\eta, \pi-\xi-\eta) \Big\} \frac{\sin(m+1)\xi \sin(m+1)\eta - \sin m\xi \sin m\eta}{\sin\xi \sin\eta} \, d\xi \, d\eta$$

Verlangt man also von $F(\xi-\eta, \xi+\eta) + F(\xi+\eta, \xi-\eta)$ die Zerlegbarkeit in entgegengesetzt monotone Komponenten auch noch in der Umgebung der Stelle $(\xi = \pi, \eta = 0)$, so läßt sich durch hinreichend kleine Wahl von a_0 bewirken, daß

$$|D_3 - C\,\overline{\varphi}(\pi-0, +0)| - |D_3| < \varepsilon_3 \text{ für } m > M_3$$

Der Koeffizient C nämlich, der dem Faktor $\frac{\pi^2}{4}$ in (19) entspricht, hat hier den Wert Null.

$$C = \lim_{m=\infty} \int_0^{a_0} \int_0^{\xi} \Big\{ \frac{\sin(m+1)\xi}{\xi} \frac{\sin(m+1)\eta}{\eta} - \frac{\sin m\xi}{\xi} \frac{\sin m\eta}{\eta} \Big\} d\xi \, d\eta = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{8} = 0$$

$|D_2| < \varepsilon_2$, wenn man wie in Hülfssatz 2 annimmt,

daß: $\int_0^{\pi} \int_0^{a} \frac{\varphi(\xi, \eta) - \varphi(\xi, +0)}{\eta} \Big| \, d\xi \, d\eta$ endlich bleibt.

Schließlich lassen sich D_4 und D_5 nach der Methode von Hülfssatz 1 durch alleinige Vergrößerung von m beliebig verkleinern, da in diesen Integralen die Nenner niemals unter eine, wenn auch kleine, positive Schranke hinabsinken.

Unter den angeführten Voraussetzungen ergibt sich als Endresultat:

$$\lim_{m = \infty} Dm\ (x, y) = \frac{1}{8}\,\varphi\,(+0, +0)$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ \lim_{\substack{\xi = +0 \\ \eta = +0}} \overline{F}\,(2\gamma, 2\delta) + \lim_{\substack{\xi = +0 \\ \eta = -0}} \overline{F}\,(2\gamma, 2\delta) \right\} \tag{20}$$

Aus der Art, wie dieses Resultat gewonnen wurde, erhellt, daß die Funktion $f(x, y)$ in dem betrachteten Punkte (x_0, y_0) vier Unstetigkeitsgeraden haben kann, die Winkel von 45° mit einander bilden und wovon zwei parallel zu den Koordinatenaxen $\overrightarrow{0X}$, $\overrightarrow{0Y}$ orientiert sind. In jedem Oktanten muß sich die Funktion beim Übergang in den Punkt (x_0, y_0) einem endlichen Grenzwert nähern. Die Diagonalreihe gibt das arithmetische Mittel dieser acht Grenzwerte, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(D_1) $f(x, y)$ ist endlich und integrabel,

(D_2) legt man durch den Punkt (x_0, y_0) ein unter + 45° gegen das ursprüngliche geneigtes Koordinatensystem mittels der Transformation:

$$\begin{cases} x = \xi - \eta - x_0 \\ y = \xi + \eta - y_0 \end{cases}$$

so existiert: $\displaystyle\int_{-2\pi-a}^{+2\pi+a} \int_{\eta} |F(x_0, y_0, \xi, \eta) - F(x_0, y_0, \xi, +0)|\, d\xi\, d\eta$

(D_3) In der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) sowie des Punktes $(x_0 + \pi,\ y_0 + \pi)$ ist $f(x, y)$ in die Summe zweier entgegengesetzt monotonen Funktionen zerlegbar, welche in Richtung der Diagonalen der ursprünglichen Koordinatenaxen $(\overrightarrow{0X}, \overrightarrow{0Y})$ gleichsinnig zu- bezw. abnehmen.

§ 5.

Die Fejèrsche Summationsmethode.

Auf pag. 12 (Gl. 9) fanden wir folgende Formel für die Partialsumme s_m^n der Fourierschen Entwicklung von $f(x, y)$:

$$s_m^n(x, y) =$$

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta) \frac{\sin(2m+1)\gamma}{\sin\gamma} \frac{\sin(2n+1)\delta}{\sin\delta} \, d\gamma \, d\delta.$$

Wir wollen beweisen, daß die Doppelfolge der arithmetischen Mittel aus diesen Partialsummen, nämlich:

$$M_p^q = \frac{1}{p, q} \sum_0^{p-1} m \sum_0^{q-1} n \, s_m^n(x, y) = \frac{1}{p \cdot q} S_{p-1}^{q-1}(x, y), \quad \begin{cases} p = 1, 2, \ldots \\ q = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

dem Grenzwerte $\frac{1}{4} F(x, y, +0, +0)$ zustrebt, falls dieser existiert und die Funktion $f(x, y)$ als endlich und im Fundamentalquadrat integrabel vorausgesetzt wird.

Es soll also gezeigt werden, daß:

$$\lim_{p, q = \infty} M_p^q(x\, y) = \frac{1}{4} F(x, y, +0, +0) \quad \text{ist.}$$

Wir haben

$$S_{p-1}^{q-1} = \sum_0^{p-1} m \sum_0^{q-1} n \, s_m^n$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta) \sum_0^{p-1} m \frac{\sin(2m+1)\gamma}{\sin\gamma} \sum_0^{q-1} n \frac{\sin(2n+1)\delta}{\sin\delta} \, d\gamma \, d\delta$$

und da

$$\sum_0^{p-1} m \frac{\sin(2m+1)\gamma}{\sin\gamma} = \sum_0^{p-1} m \frac{2 \sin\gamma \sin(2m+1)\gamma}{2 \sin^2\gamma}$$

$$= \sum_0^{p-1} m \frac{\cos 2m\gamma - \cos 2(m+1)\gamma}{2 \sin^2\gamma}$$

$$\frac{1 - \cos 2p\gamma}{2 \sin^2\gamma} = \left(\frac{\sin p\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 = \sigma_p^2(\gamma)$$

geschrieben werden möge,

so ist

$$(21) \qquad S_p^q = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta)\ \sigma_p^2(\gamma)\, \sigma_q^2(\delta)\, d\gamma\, d\delta.$$

Erinnern wir uns nun der folgenden Formeln, die in der unter [2]) p. 6 zitierten Arbeit von Fejèr näher begründet werden:

I). $$\frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p^2(\gamma)\, d\gamma = \frac{\pi}{2}; \qquad p = 1, 2, 3.....$$

II). $$\lim_{p=\infty} \left\{ \frac{1}{p} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p^2(\gamma)\, d\gamma \right\} = 0$$

III). $$\lim_{p=\infty} \left\{ \frac{1}{p} \int_0^{a} \sigma_p^2(\gamma)\, d\gamma \right\} = \lim_{p=\infty} \left[\frac{1}{p} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \right\} \sigma_p^2(\gamma)\, d\gamma \right] = \frac{\pi}{2}$$

so ergibt sich:

$$M_p^q = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(2\gamma, 2\delta)}{p \cdot q}\ \sigma_p^2(\gamma)\, \sigma_q^2(\delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(2\gamma, 2\delta) - F(+0, +0)}{p \cdot q}\ \sigma_p^2(\gamma)\, \sigma_q^2(\delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$+ F(+0, +0) \cdot \frac{1}{p\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p^2(\gamma)\, d\gamma \cdot \frac{1}{q\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_q^2(\delta)\, d\delta$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(2\gamma, 2\delta) - F(+0, +0)}{p \cdot q} \sigma_p^2(\gamma) \sigma_q^2(\delta) \, d\gamma \, d\delta$$

$$+ \frac{1}{4} F(+0, +0)$$

und

$$M_p^q - \frac{1}{4} F(x, y, +0, +0)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^a \int_0^b + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \int_0^b + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_b^{\frac{\pi}{2}} \right\} \frac{F(2\gamma, 2\delta) - F(+0, +0)}{p \cdot q} \sigma_p^2(\gamma) \sigma_q^2(\delta) \, d\gamma \, d\delta.$$

Wegen der Existenz von $F(+0, +0)$ muß man a und b so klein wählen können, daß

$$|F(2\gamma, 2\delta) - F(+0, +0)| < 4\varepsilon_1 \text{ für } \begin{cases} 0 < 2\gamma \leqq a \\ 0 < 2\delta \leqq b \end{cases}$$

Da ferner

$$|f(x, y)| < G \text{ also } |F(+0, +0)| < 4G,$$

so folgt unter Benutzung der Formeln II) und III)

$$\left| M_p^q - \frac{1}{4} F(+0, +0) \right| < 4\varepsilon_1 \frac{1}{\pi p} \int_0^a \sigma_p^2(\gamma) \, d\gamma \cdot \frac{1}{\pi q} \int_0^b \sigma_q^2(\delta) \, d\delta$$

$$+ \frac{8G}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{p} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p^2(\gamma) \, d\gamma \cdot \frac{1}{q} \int_0^b \sigma_q^2(\delta) \, d\delta \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p^2(\gamma) \, d\gamma \cdot \frac{1}{q} \int_b^{\frac{\pi}{2}} \sigma_q^2(\delta) \, d\delta \right\}$$

$$\left| M_p^q - \frac{1}{4} F(+0, +0) \right| < \varepsilon_1 + \frac{8G}{\pi^2} \left\{ \varepsilon_2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \varepsilon_3 \right\}$$

$$< \varepsilon, \text{ wenn } p > P, \; q > Q$$

Also ist $\lim_{p,\,q=\infty} M_p^q(x,y) = \frac{1}{4} F(x,y,+0,+0)$

Q. E. D.

Wenn $f(x,y)$ stetig ist, so wird $F(x,y,+0,+0) = 4f(x,y)$ daher $\lim_{p,\,q=\infty} M_p^q(x,y) = f(x,y)$, ohne weitere Voraussetzungen über den Charakter der Stetigkeit.

Da eine in jedem Punkte eines abgeschlossenen Bereichs stetige Funktion dort gleichmäßig stetig ist, also ein allgemein gültiges ε_1 für alle (x,y) besitzt, so sieht man aus obigem Beweise sofort, daß die Annäherung von $M_p^q(x,y)$ an $f(x,y)$ eine gleichmäßige ist. Dann muß aber auch die aus der Folge M_q^q gebildete Doppelreihe gleichmäßig gegen $f(x,y)$ konvergieren.

Wir erhalten diese Doppelreihe durch den Ansatz:

$$
\begin{aligned}
M_p^q &= M_1^1 + \sum_2^q{}_r\,(M_r^1 - M_{r-1}^1) + \sum_2^q{}_t\,(M_1^t - M_1^{t-1}) \\
&\quad + \sum_2^p{}_r \sum_2^q{}_t\,(M_r^t - M_r^{t-1} - M_{r-1}^t + M_{r-1}^{t-1}) \\
&= s_0^0 + \sum_1^{p-1}{}_r \frac{1}{r(r+1)}\left(r\,s_r^0 - (r+1)\,s_{r-1}^0\right) \\
&\quad + \sum_1^{q-1}{}_t \frac{1}{t(t+1)}\left(t\,s_0^t - (t+1)\,s_0^{t-1}\right) \\
&\quad + \sum_1^{p-1}{}_r \sum_1^{q-1}{}_t \frac{1}{r\,t\,(r+1)(t+1)}\left(r\,t\,s_r^t - r(t+1)\,s_r^{t-1}\right. \\
&\quad \left. - (r+1)\,t\,s_{r-1}^t + (r+1)(t+1)\,s_{r-1}^{t-1}\right) \\
&= s_0^0 + \sum_1^{p-1}{}_r \frac{1}{r(r+1)}\left(r\,s_r^0 - \sum_0^{r-1}{}_m\, s_m^0\right) \\
&\quad + \sum_1^{q-1}{}_t \frac{1}{t(t+1)}\left(t\,s_0^t - \sum_0^{t-1}{}_n\, s_0^n\right) \\
&\quad + \sum_1^{p-1}{}_r \sum_1^{q-1}{}_t \frac{1}{r\,t\,(r+1)(t+1)}\left(r\,t\,s_r^t - r\sum_0^{t-1}{}_n\, s_r^n\right. \\
&\quad \left. - t\sum_0^{r-1}{}_m\, s_m^t + \sum_0^{r-1}{}_m \sum_0^{t-1}{}_n\, s_m^n\right)
\end{aligned}
$$

$$\text{Nun ist } r\,s_r^0 - \sum_0^{r-1} {}_m\, s_m^0 = r \sum_0^r {}_\mu\, B_\mu^0 - \sum_0^{r-1} {}_m \sum_0^m {}_\mu\, B_\mu^0$$

$$= r \sum_0^r {}_\mu\, B_\mu^0 - \sum_0^{r-1} {}_\mu \sum_\mu^{r-1} {}_m\, B_\mu^0$$

$$= r \sum_0^r {}_\mu\, B_\mu^0 - \sum_0^{r-1} {}_\mu\, (r-\mu)\, B_\mu^0$$

$$= r\, B_r^0 + \sum_1^{r-1} {}_\mu\, \mu\, B_\mu^0$$

$$= \sum_1^r {}_\mu\, \mu\, B_\mu^0$$

$$\text{ebenso } t\,s_0^t - \sum_0^{t-1} {}_n\, s_0^n = \sum_1^t {}_\nu\, \nu\, B_0^\nu$$

und

$$r\,t\,s_r^t - r \sum_0^{t-1} {}_n\, s_r^n - t \sum_0^{r-1} {}_m\, s_m^t + \sum_0^{r-1} {}_m \sum_0^{t-1} {}_n\, s_m^n$$

$$r \sum_0^r {}_\mu \left(t \sum_0^t {}_\nu\, B_\mu^\nu - \sum_0^{t-1} {}_n \sum_0^n {}_\nu\, B_\mu^\nu \right) - \sum_0^{r-1} {}_m \sum_0^m {}_\mu \left(t \sum_0^t {}_\nu\, B_\mu^\nu - \sum_0^{t-1} {}_n \sum_0^n {}_\nu\, B_\mu^\nu \right)$$

$$= r \sum_0^r {}_\mu \left(\sum_1^t {}_\nu\, \nu\, B_\mu^\nu \right) - \sum_0^{r-1} {}_m \sum_0^m {}_\mu \left(\sum_1^t {}_\nu\, \nu\, B_\mu^\nu \right)$$

$$\sum_1^r {}_\mu\, \mu \sum_1^t {}_\nu\, \nu\, B_\mu^\nu$$

weswegen:

$$M_p^q = B_0^0 + \sum_1^{p-1} {}_r \frac{1}{r(r+1)} \sum_1^r {}_\mu\, \mu\, B_\mu^0 + \sum_1^{q-1} {}_t \frac{1}{t(t+1)} \sum_1^t {}_\nu\, \nu\, B_0^\nu$$

$$+ \sum_1^{p-1} {}_r \sum_1^{q-1} {}_t \frac{1}{r \cdot t\,(r+1)\,(r+1)} \sum_1^r {}_\mu\, \mu \sum_1^t {}_\nu\, \nu\, B_\mu^\nu$$

für $p = 2, 3, 4 \ldots$
$q = 2, 3, 4 \ldots$

woraus sich für $\lim p, q = \infty$ die gewünschte Fejèrsche Doppelreihe ergibt. Wir können nun als Ergebnis dieses Paragraphen folgenden Satz aussprechen:

„Ist $f(x,y)$ eine endliche, in x und y nach 2π periodische und im Fundamentalquadrat integrable Funktion, so konvergiert die Fejèrsche Doppelreihenentwicklung von $f(x,y)$:

$$(22)\quad B_0^0 + \sum_1^\infty{}^r \frac{1}{r(r+1)} \sum_1^r{}^\mu \mu B_\mu^0 + \sum_1^\infty{}^t \frac{1}{t(t+1)} \sum_1^t{}^\nu \nu B_0^\nu + \sum_1^\infty{}^r \sum_1^\infty{}^t \frac{1}{r\,t\,(r+1)(t+1)} \sum_1^r{}^\mu \mu \sum_1^t{}^\nu \nu B_\mu^\nu$$

wo $B_\mu^\nu = \left(a_\mu^\nu \cos \mu x + b_\mu^\nu \sin \mu x\right) \cos \nu y + \left(c_\mu^\nu \cos \mu x + d_\mu^\nu \sin \mu x\right) \sin \nu y$

und a, b, c, d die Fourierschen Konstanten von $f(x, y)$ bedeuten, gegen den Grenzwert:

$$\frac{1}{4} F(x, y, +0, +0) = \frac{1}{4} \Big\{ f(x+0, y+0) + f(x+0, y-0) + f(x-0, y+0) + f(x-0, y-0) \Big\}$$

überall, wo dieser existiert. Sie konvergiert gleichmäßig gegen $f(x, y)$ in jedem abgeschlossenen Bereich, in welchem $f(x, y)$ stetig ist."

§ 6.

Über das Poissonsche Doppelintegral.

Führt man in die Fouriersche Doppelreihe:

$$f(x, y) = \lim_{m, n = \infty} \left[\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha, \beta) \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_1^m{}^\mu \cos \mu (\alpha - x) + \frac{1}{2} \sum_1^n{}^\nu \cos \nu (\beta - y) + \sum_1^m{}^\mu \sum_1^n{}^\nu \cos \mu (\alpha - x) \cos \nu (\beta - y) \right\} d\alpha\, d\beta \right]$$

die Konvergenzfaktoren $r^\mu \cdot \varrho^\nu$ ein, so daß

$$\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \lim_{m, n = \infty} \left[\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha, \beta) \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_1^m{}^\mu r^\mu \cos \mu (\alpha - x) + \frac{1}{2} \sum_1^n{}^\nu \varrho^\nu \cos \nu (\beta - y) + \sum_1^m{}^\mu \sum_1^n{}^\nu r^\mu \varrho^\nu \cos \mu (\alpha - x) \cos \nu (\beta - y) \right\} d\alpha\, d\beta \right]$$

wird, so läßt sich mit Hülfe der Formel:

(23)

$$\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} {}_{\mu}\, r^{\mu} \cos \mu = \varphi_2 \cdot \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2\, r \cos \varphi} = \frac{1}{2} P(r, \varphi) \quad \begin{matrix} r < 1 \\ \varrho < 1 \end{matrix}$$

die Doppelreihe summieren. Es ist nämlich:

$$\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \lim_{m, n = \infty} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta) \left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{m} {}_{\mu}\, r^{\mu} \cos \mu (\alpha - x) \right] \right.$$

$$\left. \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{n} {}_{\nu}\, \varrho^{\nu} \cos \nu (\beta - y) \right] d\alpha\, d\beta \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta) \left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} {}_{\mu}\, r^{\mu} \cos \mu (\alpha - x) \right]$$

$$\left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu}\, \varrho^{\nu} \cos \nu (\beta - y) \right] d\alpha\, d\beta$$

$$(24) \qquad = \frac{1}{4\, \pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta)\, P(r, \alpha - x)\, P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha\, d\beta,$$

wo man Summation und Integration vertauscht hat. Das ist aber hier gestattet, weil die beiden Reihen vom Typus:

$$\sum_{1}^{\infty} {}_{\mu}\, f(\alpha, \beta)\, r^{\mu} \cos \mu (\mu - x) < G \sum_{1}^{\infty} {}_{\mu}\, r^{\mu}$$

für $\begin{cases} r < 1 \\ \varrho < 1 \end{cases}$ gleichmäßig (und auch absolut) konvergieren.

Wir sehen nun von allen früher, bei der Fourierschen Reihe, über $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen, mit Ausnahme der Endlichkeit, Periodizität und Integrabilität ab, definieren $\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho)$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \frac{1}{4\, \pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta)\, P(r, \alpha - x)\, P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha\, d\beta$$

und fragen nach dem Werte von $\lim_{r,\varrho=1} \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho)$. Transformiert man $\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho)$ durch die Substitution

$$(25)\qquad \begin{cases} \alpha - x = \gamma; & \alpha = x + \gamma; & d\alpha = d\gamma \\ \beta - y = \delta; & \beta = y + \delta; & d\beta = d\delta \end{cases}$$

so wird:

$$\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{(-\pi-x)}^{\pi-x} \int_{(-\pi-y)}^{\pi-y} f(x+\gamma, y+\delta)\, P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+\gamma, y+\delta)\, P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

wegen der Periodizität von f und P.

$$= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\int_{0}^{\pi} \right\} f(x+\gamma, y+\delta)\, P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$(26)\qquad = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} F(x, y, \gamma, \delta)\, P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

wo $F(x, y, \gamma, \delta) = f(x+\gamma, y+\delta) + f(x+\gamma, y-\delta) + f(x-\gamma, y+\delta) + f(x-\gamma, y-\delta)$

Sei $a > 0, b > 0$; sonst aber beliebig klein konstant; so ist

$$\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \int_0^{a}\int_0^{b} + \int_a^{\pi}\int_0^{b} + \int_0^{\pi}\int_b^{\pi} \right\} F(x, y, r, \varrho)\, P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$(27)\qquad = \frac{1}{4\pi^2} (I_1 + I_2 + I_3)$$

Ich beweise zunächst, daß die zwei letzten Integrale für $\lim r, \varrho = 1$ verschwinden.

$$|I_2 + I_3| < G \left\{ \int_a^{\pi} |P(r, \gamma)|\, d\gamma \int_0^{b} P(\varrho, \delta)|\, d\delta + \int_0^{\pi} P(r, \gamma)|\, d\gamma \int_b^{\pi} P(\varrho, \delta)|\, d\delta \right\}$$

wo $G > |F(x, y, r, \varrho)|$ eine endliche Zahl, wenn wir f (x, y) als endlich voraussetzen.

(28) Nun ist $P(r, \gamma) = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\gamma} > \dfrac{1 - r^2}{(1 + r)^2} = \dfrac{1 - r}{1 + r} > 0,$

wenn $r < 1$, daher $|P(r, \gamma)| = P(r, \gamma)$

Bleibt ferner γ im Intervalle $0 < \xi \leq \gamma \leq \pi$, so ist

$$1 + r^2 - 2r\cos\gamma = (1-r)^2 + 2r(1-\cos\varphi) = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$> 4r\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$> 4r\sin^2\frac{\xi}{2}$$

also:

$$P(r,\gamma) < \frac{1-r^2}{4r\sin^2\frac{\xi}{2}} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 < r \leq 1 \\ 0 < \xi \leq \gamma \leq \pi \end{cases} \tag{29}$$

Da zweitens

$$\int P(r,\gamma)\,d\gamma = \int \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\gamma}\,d\gamma$$

$$= 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) + c$$

so folgt

$$\int_0^{\xi} P(r,\gamma)\,d\gamma = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\right) \leq \pi \tag{30}$$

$$\text{für} \quad \begin{cases} 0 \leq \xi \leq \pi \\ 0 < r \leq 1 \end{cases}$$

Aus den Ungleichungen (29) und (30) ergibt sich:

$$|I_2 + I_3| < G\left\{\frac{\pi}{4r}\cdot\frac{1-r^2}{\sin^2\frac{a}{2}} + \frac{\pi}{4\varrho}\cdot\frac{1-\varrho^2}{\sin^2\frac{b}{2}}\right\}$$

$$< (1-r^2)A + (1-\varrho^2)B$$

wo A und B Konstanten sind. Man hat also ohne weiteres:

$$\lim_{r,\varrho=1} |I_2 + I_3| = \lim_{r,\varrho=1}\{(1-r^2)A + (1-\varrho^2)B\} = 0 \tag{31}$$

Wir machen nun die weitere Annahme, daß $F(x,y,+0,+0)$ existiert und beweisen, daß durch hinreichende Verkleinerung von a, b:

$|I_1 - \pi^2 \cdot F(x,y,r,\varrho)| < \varepsilon$ wird, wenn $\begin{cases} 1-\delta_\varepsilon < r < 1 \\ 1-\eta_\varepsilon < \varrho < 1 \end{cases}$

und δ_ε, η_ε hinreichend klein.

$$I_1 - \pi^2 F(x, y, +0, +0)$$

$$= \int_0^a \int_0^b [F(x,y,\gamma,\delta) - F(x,y,+0,+0)] P(r,\gamma) P(\varrho,\delta) \, d\gamma \, d\delta$$

$$+ F(x, y, +0, +0) \left\{ \int_0^a P(r, \gamma) \, d\gamma \int_0^b P(\varrho, \delta) \, d\delta - \pi^2 \right\}$$

$$| I_1 - \pi^2 F(x,y, +0, +0) | <$$

$$\varepsilon_1 \pi^2 + G \left\{ 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \right) - \pi^2 \right\}$$

wenn a, b so klein genommen wird, daß

$$| F(x, y, \gamma, \delta) - F(x, y, +0, +0) | < \varepsilon_1 \text{ für } \begin{cases} 0 < \gamma \leqq a \\ 0 < \delta \leqq b \end{cases}$$

Hat man aber erst a, b fixiert, so kann man

$$\delta_\varepsilon < \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{M}, \quad \eta_\varepsilon < \frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{N}$$

so klein wählen, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{a}{2} > \frac{1}{\delta_\varepsilon} \operatorname{tg} \frac{a}{2} > M \\ \frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{b}{2} > \frac{1}{\eta_\varepsilon} \operatorname{tg} \frac{b}{2} > N \end{aligned}\right\}, \quad \begin{aligned} &\text{wo } 1 - \delta_\varepsilon \leqq r \leqq 1 \\ &\text{und } 1 - \eta_\varepsilon \leqq \varrho \leqq 1 \\ &\text{und } M, N \text{ beliebig groß.} \end{aligned}$$

Folglich wird:

$$\left| 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \right) - \pi^2 \right| <$$

$$\left| 4 \operatorname{arctg} M \operatorname{arctg} N - \pi^2 \right| < \varepsilon_1$$

wenn M und N groß genug gewählt wurden.

Es ergibt sich:

$$(32) \qquad I_1 - \pi^2 F(x, y, +0, +0) < \varepsilon_1 (\pi^2 + G) = \varepsilon,$$

$$\text{wenn } 1 - \delta_\varepsilon \leqq r \leqq 1, \; 1 - \eta_\varepsilon \leqq \varrho \leqq 1$$

Wir können nunmehr folgenden Satz aussprechen:

„Ist $f(x, y)$ eine im Fundamentalquadrat $\begin{cases} -\pi < x \leqq \pi \\ -\pi < y \leqq \pi \end{cases}$

endliche, integrable Funktion, so ist der Grenzwert des Poissonschen Integrals:

$$\lim_{r,\varrho=1} \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho)$$

$$= \lim_{r,\varrho=1} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha,\beta)\, P(r, \alpha-x)\, P(\varrho, \beta-y)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \frac{1}{4} F(x, y, +0, +0)$$

$$= \frac{1}{4}\left[f(x+0, y+0) + f(x+0, y-0) + f(x-0, y+0) + f(x-0, y-0)\right]$$

in jedem Punkte (x, y), wo der letzte Ausdruck existiert."

Denn aus der Zerlegung (27) folgt mit Hülfe von (31) und (32)

$$\left| \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) - \frac{1}{4} F(x, y, +0, +0) \right|$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \left| I_1 - \pi^2 F(x, y, +0, +0) \right| + \frac{1}{4\pi^2} \left| I_2 + I_3 \right|$$

$$< \frac{\varepsilon'}{4\pi^2} + \frac{\varepsilon''}{4\pi^2} < \varepsilon$$

wenn a und b klein genug und r, ϱ nahe der Einheit.

Selbstverständlich gilt für einen Stetigkeitspunkt:

$$\lim_{r,\varrho=1} \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = f(x, y).$$

Wir wenden uns nun dem Falle zu, wo (x, y) auf einer beliebig gegen die Axen gerichteten Unstetigkeitsgeraden liegt. Die Gleichung der Geraden sei:

$\beta - y = p(\alpha - x)$, wenn α, β die laufenden Koordinaten oder $\delta = p\gamma$, nach Einführung der Transformation (25). Wir postulieren noch

$$0 < |p| < \infty$$

Es genügt, wenn wir das I_1 betrachten, denn hier ist wie zuvor in (31)

$$\lim_{r,\varrho=1} (I_2 + I_3) = 0$$

$$I_1 = \int_0^a \int_0^b F(x, y, \gamma, \delta)\ P(r, \gamma)\ P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$= \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} f(x+\gamma, y+\delta)\ P(r, \gamma)\ P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

(33)
$$= \left\{ \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{p\gamma} + \int_{-a}^{a} \int_{p\gamma}^{b} \right\} f(x+\gamma, y+\delta)\ P(r, \gamma,)\ P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta,$$

wo $b = pa$ sein soll. Wir nehmen die Fälle $p = 0$, $p = \infty$ aus, da sie durch den vorhergehenden Satz erledigt sind. Bei Annäherung an den festen Punkt (x, y) soll $f(x, y)$ zwei verschiedene Grenzwerte f_2 und f_1 annehmen, je nachdem der variable Punkt stets oberhalb oder unter der Unstetigkeitsgeraden liegt. In Zeichen:

(34)
$$f_1(x, y) = \lim_{\gamma, \delta = 0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \begin{cases} -a < \gamma < a \\ -b \leq \delta < p\gamma \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = \lim_{\gamma, \delta = 0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \begin{cases} -a < \gamma \leq a \\ p\gamma < \delta \leq b \end{cases}$$

Dann kann man schreiben:

$$I_1 = \int_{-a}^{a} d\gamma \int_{-b}^{p\gamma} d\delta \Big[f(x+\gamma, y+\delta) - f_1(x, y) \Big] P(r, \gamma)\ P(\varrho, \delta)$$

$$+ f_1(x, y) \int_a^a P(r, \gamma)\, d\gamma \int_b^{p\gamma} P(\varrho, \delta)\, d\delta$$

$$+ \int_a^a d\gamma \int_{p\gamma}^{b} d\delta \Big[f(x+\gamma, y+\delta) - f_2(x, y) \Big] P(r, \gamma)\ P(\varrho, \delta)$$

$$+ f_2(x, y) \int_{-a}^{a} P(r, \gamma)\, d\gamma \int_{p\gamma}^{b} P(\varrho, \delta)\, d\delta$$

(35)
$$= J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

Ist $\lambda^{(1)}(a, b)$ die obere Grenze der Funktion

$|f(x+\gamma, y+\delta) - f_1(x, y)|$ im Bereich $\begin{cases} -a \leq \gamma \leq a \\ -b < \delta < p\gamma \end{cases}$

und $\lambda^{(2)}(a, b)$ diejenige von

$|f(x+\gamma, y+\delta) - f_2(x, y)|$ im Bereich $\begin{cases} -a < \gamma < a \\ p\gamma < \delta < b \end{cases}$

so ist

$$(36) \qquad |J_1| + |J_3| < 2\pi^2 \lambda^{(1)}(a, b) + 2\pi^2 \lambda^{(2)}(a, b) < \varepsilon_1$$

wenn a klein genug, da b ja mit a verschwindet;

ferner:

$$|J_2 + J_4 - 2\pi^2 [f_1(x, y) + f_2(x, y)]|$$

$$< G \int_a^a P(r, \gamma)\, \delta\gamma \int_b^{p\gamma'} P(\varrho, \delta)\, d\delta - 2\pi^2 \Big|$$

$$+ G \int_a^a P(r, \gamma)\, d\gamma \int_{p\gamma'}^{b} P(\varrho, \delta)\, d\delta - 2\pi^2 \Big|$$

Nun ist $\int_a^a \int_b^{p\gamma'} = \left\{\int_a^0 + \int_0^a\right\} \int_b^{p\gamma'} = \int_0^a \left\{\int_{-b}^{-p\gamma'} + \int_b^{p\gamma'}\right\} = \int_0^a \left\{\int_b^{p\gamma'} + \int_{-p\gamma'}^{b}\right\} = \int_0^a \int_b^{+b}$

und $\int_a^a \int_{p\gamma'}^{b} = \left\{\int_a^0 + \int_0^a\right\} \int_{p\gamma'}^{b} = \int_0^a \left\{\int_{-p\gamma'}^{b} + \int_{p\gamma'}^{b}\right\} = \int_0^a \left\{\int_b^{p\gamma'} + \int_{p\gamma'}^{b}\right\} = \int_0^a \int_b^{+b}$

weil P eine gerade Funktion von γ resp. δ ist, und da

$$\lim_{r, \varrho = 1} \int_0^{a} \int_b^{+b} P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta = 2\pi^2,$$

so hat man

$$(37) \qquad |J_2 + J_4 - 2\pi^2 \{f_1(x, y) + f_2(x, y)\}| < \varepsilon_2$$

für r, ϱ nahe 1.

Schließlich ergibt sich noch:

$$\left|\frac{1}{4\pi^2} I_1 - \frac{1}{2}\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\}\right|$$

$$< \frac{1}{4\pi^2} |(J_1 + J_3)| + \frac{1}{4\pi^2} |J_2 + J_4 - 2\pi^2 \{f_1(x, y) + f_2(x, y)\}|$$

$$(38) \qquad < \frac{\varepsilon_1}{4\pi^2} + \frac{\varepsilon_2}{4\pi^2} < \varepsilon \text{ für a klein genug und r, } \varrho \text{ nahe}$$

der Einheit.

Verbindet man dieses Resultat mit den Gleichungen (27) und (31), so erhält man den Satz:

„Befindet sich der Punkt (x, y) auf einer beliebigen Unstetigkeitsgeraden, so konvergiert das Poissonsche Integral beim Grenzübergang lim $r, \varrho = 1$ zum arithmetischen Mittel der Grenzwerte

zu beiden Seiten dieser Geraden, welche die Funktion bei Annäherung an den Punkt (x, y) annimmt."

$$\lim_{r,\varrho=1} \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \frac{1}{2}\left\{f_1(x,y) + f_2(x,y)\right\}$$

Dieser Satz behält seine Gültigkeit, wenn man an Stelle der Unstetigkeitsgeraden eine stetig gekrümmte Kurve $\delta = \psi(\gamma)$ treten läßt, welche die Gerade $\delta = p\gamma$ $(0 < p < \alpha)$ als Tangente im Nullpunkte hat. Es müssen dann aber unter $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ die Grenzwerte verstanden werden, welche $f(\gamma, \delta)$ beim Einrücken von γ, δ in den Punkt (x, y) annimmt, wenn der variable Punkt stets oberhalb (resp. unterhalb) der Kurve bleibt, ohne diese selbst zu erreichen.

Ist nämlich $0 < p < \infty$, so kann man I_1 nach dem Schema (35) in vier Teilintegrale $J_1 \ldots J_4$ zerlegen. Nur tritt dabei $\psi(\gamma)$ an die Stelle von $p\gamma$. Wie zuvor bleibt (36) gültig, während (37), also auch (38) erfüllt sind, wenn man zeigen kann, daß

$$\lim_{r,\varrho=1} \int_{-a}^{a} \int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P(r,\gamma)\, P(\varrho,\delta)\, d\gamma\, d\delta \text{ verschwindet.}$$

In der Tat ist nach (30):

$$\int_0^a \int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P(r,\gamma)\, P(\varrho,\delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$= 2\int_0^a P(r,\gamma)\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\frac{\psi(\gamma)}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\frac{p\gamma}{2}\right)\right\} d\gamma$$

und

$$\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\frac{\psi(\gamma)}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\frac{p\gamma}{2}\right)\right|$$

$$\operatorname{arctg}\left|\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\psi(\gamma)}{2} - \operatorname{tg}\frac{p\gamma}{2}}{1+\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\psi(\gamma)}{2}\operatorname{tg}\frac{p\gamma}{2}}\right|$$

weil arctg eine ungerade Funktion ist;

$$< \operatorname{arctg}\left|\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi(\gamma) - p\gamma)}{\sin\frac{\psi(\gamma)}{2}\cdot\sin\frac{p\gamma}{2}}\right|,$$

wenn a hinreichend klein, da dann $\psi(\gamma)$ und $p\gamma$ dasselbe Vorzeichen haben und das Produkt $\sin\frac{\psi(\gamma)}{2}\sin\frac{p\gamma}{2} > 0$ ist. Nun war $\psi(\gamma)$ nach Voraussetzung von stetiger Krümmung, d. h. mit einem stetigen zweiten Differentialquotienten versehen, somit ist

$$\psi(\gamma) - p\gamma = \frac{\gamma^2}{2!}\psi''(\Theta\gamma) \qquad 0 < \Theta < 1$$

und

$$\frac{\psi(\gamma) - p\gamma}{\psi(\gamma) \cdot p\gamma} = \frac{\frac{1}{2!}\psi''(\Theta\gamma)}{p^2 + \frac{\gamma}{2!} \cdot p \cdot \psi''(\Theta\gamma)}$$

eine im Intervall $0 \leq \gamma < a$ endliche und stetige Funktion. Dasselbe gilt dann von:

$$\sin\frac{1}{2}(\psi(\gamma) - p\gamma) \quad \sin\frac{1}{2}(\psi(\gamma) - p\gamma) \quad \frac{\psi(\gamma)\cdot p\gamma}{2\ 2} \cdot \frac{\psi(\gamma) - p\gamma}{\psi(\gamma)\cdot p\gamma}$$
$$\sin\frac{\psi(\gamma)}{2}\sin\frac{p\gamma}{2} \quad \frac{1}{2}(\psi(\gamma) - p\gamma) \quad \sin\frac{\psi(\gamma)}{2}\sin\frac{p\gamma}{2}$$

Bezeichnen wir mit $K(a)$ die obere Grenze dieser Funktion im Intervall $0 \leq \gamma \leq a$, so ist:

$$\int_0^a \int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P.\,P.\,d\gamma\,d\delta \Big| < 2\operatorname{arctg}\left|\frac{1-\varrho}{1+\varrho}K(a)\right| \cdot \int_0^a P(r,\gamma)\,d\gamma, \text{ weil } \operatorname{arctg}|\varphi$$

eine monoton zunehmende Funktion ihres Argumentes ist.

$$\int_0^a \int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P.\,P.\,d\gamma\,d\delta \Big| < 2\pi \operatorname{arctg}\left|\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\cdot K(a)\right| \cdot$$

$< \varepsilon$, wenn r, ϱ hinreichend wenig von der Einheit verschieden, nachdem a genügend klein fixiert.

$$(39) \qquad \therefore \lim_{r,\varrho = 1} \int_0^a \int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P(r,\gamma)\,P(\varrho,\delta)\,d\gamma\,d\delta = 0$$

Es ist klar, daß man für das Integral:

$$\int_{-a}^{0} \int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} \qquad \int_0^a \int_{-p\gamma}^{\varphi(-\gamma)}$$

diese Überlegung wörtlich wiederholen kann,

weswegen:

$$\lim_{r,\varrho=1} \int_{-a}^{a} \int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P(r,\gamma)\, P(\varrho,\delta)\, d\gamma\, d\delta = 0 \tag{40}$$

Wir erhalten auf diese Weise den Lehrsatz:

„Liegt der Punkt (x,y) auf einer beliebigen, stetig gekrümmten Unstetigkeitskurve und versteht man unter $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ die beiden Grenzwerte, welche $f(\gamma,\delta)$ annimmt, wenn (γ,δ) von der einen oder anderen Seite der Kurve in den Punkt (x, y) einrückt, ohne diese selbst zu erreichen, so konvergiert das allgemeine Poissonsche Integral für $\lim r, \varrho = 1$ zum arithmetischen Mittel dieser beiden Grenzwerte, falls die Tangente der Kurve im Punkte (x, y) zu keiner der Koordinatenaxen parallel ist."

Hiermit wäre wohl im großen und ganzen die Leistungsfähigkeit des allgemeinen Poissonschen Integrals, worin r und ϱ unabhängig voneinander der Einheit zustreben, erschöpft. Etwas weiter zu gehen erlaubt uns das spezielle Poissonsche Integral, in welchem $r = \varrho$ genommen wird. Für $\mathfrak{P}(x, y, r, r)$ bleiben selbstverständlich alle vorhergehenden Entwicklungen dieses Paragraphen ohne Einschränkung bestehen. Wir fügen noch einige hinzu.

Sei z. B. (x, y) der Schnittpunkt zweier senkrecht aufeinander stehenden Unstetigkeitsgeraden. Ist $\delta = p\gamma$ die Gleichung der ersten Geraden, dann muß $\delta = -\frac{1}{p}\gamma$, resp. $\gamma = -p\delta$, diejenige der zweiten sein. Ich nehme b = a und setze an der Hand der beigefügten Figur:

$$f_1(x,y) = \lim_{\gamma,\delta=0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \left\{ \begin{array}{c} -a \leq \gamma < 0 \\ p\gamma < \delta < -\frac{1}{p}\gamma \end{array} \right\}$$

$$f_2(x,y) = \lim_{\gamma,\delta=0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 0 < \delta < a \\ -p\delta < \gamma < \frac{1}{p}\delta \end{array} \right\}$$

$$f_3(x,y) = \lim_{\gamma,\delta=0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 0 < \gamma \leq a \\ -\frac{1}{p}\gamma < \delta < p\gamma \end{array} \right\}$$

$$f_4(x,y) = \lim_{\gamma,\delta=0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \left\{ \begin{array}{c} -a \leq \delta < 0 \\ \frac{1}{p}\delta < \gamma < -p\delta \end{array} \right\}$$

dann wird

$$I_1 = \Big\{ \int_{-a}^{-pa} d\gamma \int_{0}^{a} d\delta + \int_{-a}^{0} d\gamma \int_{p\gamma}^{0} d\delta + \int_{0}^{a} d\delta \int_{-pa}^{-p\delta} d\gamma \Big\} [f(x+\gamma, y+\delta) - f_1(x,y)]\, P(r,\gamma)\, P(\varrho,\delta)$$

$$+ \text{[drei weitere Integrale von derselben Art]}$$

$$+ f_1(x,y) \Big\{ \int_{-a}^{-pa} d\gamma \int_{0}^{a} d\delta + \int_{-a}^{0} d\gamma \int_{p\gamma}^{0} d\delta + \int_{0}^{a} d\delta \int_{-pa}^{-p\delta} d\gamma \Big\} P(r,\gamma)\, P(\varrho,\delta)$$

$$+ \text{[drei Integrale derselben Art]}$$

$$= J_1 + \text{[drei ähnliche Integrale]} + J_2 + \text{[drei ähnliche Integrale]}.$$

Offenbar können nun gerade wie in unseren früheren Beweisen die ersten vier Integrale durch Verkleinerung von a unter ein beliebig kleines ε_1 herabgedrückt werden.

$$\frac{1}{f_1(x,y)}\, J_2 = \Big\{ \int_{-a}^{-pa} d\gamma \int_{0}^{a} d\delta + \int_{-a}^{0} d\gamma \int_{p\gamma}^{0} d\delta + \int_{0}^{a} d\delta \int_{-pa}^{-p\delta} d\gamma \Big\} P(r,\gamma)\, P(\varrho,\delta)$$

$$= \int_{0}^{a} P(\varrho,\delta)\, d\delta \int_{pa}^{a} P(r,\gamma)\, d\gamma + \int_{0}^{a} P(r,\gamma)\, d\gamma \int_{0}^{p\gamma} P(\varrho,\delta)\, d\delta$$

$$+ \int_{0}^{a} P(\varrho,\delta)\, d\delta \int_{p\delta}^{pa} P(r,\gamma)\, d\gamma \qquad (40)$$

Lasse ich nun noch $r = \varrho$ werden und vertausche in dem mittleren Ausdruck von (40) γ mit δ, so wird

$$J_2 = f_1(x,y) \int_{0}^{a} P(r,\delta)\, d\delta \int_{0}^{a} P(r,\gamma)\, d\gamma, \quad \text{und}$$

$$\lim_{r=1} J_2 = \pi\varrho^2 f_1(x,y)$$

Man sieht, daß für den speziellen Fall $p = 0$, der früher erledigt wurde, die Annahme $r = \varrho$ nicht gemacht zu werden braucht, da dann die zweite und dritte Komponente von J_2 in (40) verschwindet.

Die drei zu J_2 ähnlichen Integrale liefern in gleicher Weise die Grenzwerte $\pi^2 f_2(x, y)$ . . . . . $\pi^2 f_4(x, y)$. Man bekommt somit den Satz:

„Ist (x, y) der Schnittpunkt zweier aufeinander senkrechten Unstetigkeitsgeraden, so konvergiert das spezielle Poissonsche Integral, worin $r = \varrho$ gesetzt ist, gegen das arithmetische Mittel der vier Grenzwerte, welche $f(\gamma, \delta)$ bei Annäherung an (x, y) annimmt, wenn der variable Punkt jeweils im Innern eines der durch die Unstetigkeitsgeraden bestimmten Quadranten bleibt.

In Zeichen: $\lim\limits_{r=1} \mathfrak{P}(x, y, r, r) = \frac{1}{4}\left\{f_1 + f_2 + f_3 + f_4\right\}$."

Dasselbe Verfahren, durch welches Gl. (39) gewonnen wurde, gestattet uns folgende Ergänzung zu diesem Satze:

„Ist (x, y) der Schnittpunkt zweier orthogonalen regulären Kurven, deren Tangentenkreuz im Punkte (x, y) dem Koordinatenaxenkreuz nicht parallel ist, so konvergiert das spezielle Poissonsche Integral $\mathfrak{P}(x, y, r, r)$ gegen das arithmetische Mittel der vier Grenzwerte, welche $f(\gamma, \delta)$ annimmt, wenn der variable Punkt (γ, δ), jeweils ganz im Innern eines der durch die Kurven bestimmten vier Zwickel bleibend, in den Punkt (x, y) einrückt.'

Zum Schluß sei noch ein Satz angeführt, zu dessen Beweise wir kurz zeigen müssen, daß:

$$(41) \qquad \lim_{r=1} \int_0^a \int_0^\gamma P(r, \gamma)\, P(r, \delta)\, d\gamma\, d\delta = \frac{\pi^2}{2}$$

In der Tat ist:

$$\int_0^a \int_0^a = \left\{ \int_0^a \int_0^\gamma + \int_0^a \int_\gamma^a \right\} P(r, \gamma)\, P(r, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$\text{aber} \int_0^a P(r,\gamma)\, d\gamma \int_\gamma^a P(r,\delta)\, d\delta = \int_0^a P(r, \delta)\, d\delta \int_0^\delta P(r, \gamma)\, d\gamma$$

$$= \int_0^a P(r, \gamma)\, d\gamma \int_0^\gamma P(r, \delta)\, d\delta$$

$$\therefore \int_0^a \int_0^a = 2 \int_0^a \int_0^\gamma P(r,\gamma)\, P(r,\delta)\, d\gamma\, d\delta$$

und $$\lim_{r=1} \int_0^a \int_0^\gamma P(r,\gamma)\, P(r,\delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{r=1} \int_0^a \int_0^a P(r,\gamma)\, P(r,\delta)\, d\gamma\, d\delta = \frac{\pi^2}{2}$$

Eine einfache Zerlegung im Sinne von (27), (35) gibt dann den Satz:

„Existiert in jedem der acht um den Punkt (x, y) gelegenen, durch Parallelen zu den Koordinatenaxen und deren Winkel halbierenden gebildeten Oktanten ein bestimmter Grenzwert von $f(\gamma, \delta)$ beim Einrücken in den Punkt (x, y), so konvergiert $\mathfrak{P}(x, y, r, r)$ zum arithmetischen Mittel dieser acht Grenzwerte."

§ 7.

Vergleich der verschiedenen Darstellungsmethoden durch Anwendung auf ein Beispiel.

Um die Anwendbarkeit unserer Untersuchungen an einem Beispiel zu erproben und die verschiedenen Darstellungsmethoden unter einander zu vergleichen, wählen wir eine Funktion, die zwar alle für unsere analytischen Darstellungen erforderlichen Bedingungen erfüllt, jedoch durch einen einfachen analytischen Ausdruck für die ganze Ebene einheitlich nicht definiert werden kann. Eine solche Funktion ist z. B die folgende, deren geometrisches Abbild durch die Oberfläche einer regulären Pyramide von der Höhe π über dem Fundamentalquadrat gegeben ist.

1) für $\left.\begin{matrix} -\pi \leq x \leq 0 \\ x \leq y \leq -x \end{matrix}\right\}$ ist $f(x, y) = \pi + x,$

2) für $\left.\begin{matrix} 0 \leq x \leq \pi \\ -x \leq y \leq x \end{matrix}\right\}$ ist $f(x, y) = \pi - x$,

3) „ $\left.\begin{matrix} -\pi \leq y \leq 0 \\ y \leq x \leq -y \end{matrix}\right\}$ „ $f(x, y) = \pi + y$,

4) „ $\left.\begin{matrix} 0 \leq y \leq \pi \\ -y \leq x \leq y \end{matrix}\right\}$ „ $f(x, y) = \pi - y$.

Da diese Funktion überall stetig und integrabel ist, so genügt sie der Bedingung H_1 p. 27. Die geometrische Anschauung zeigt klar, ohne daß man auf den analytischen Beweis einzugehen braucht, daß sie in jedem Punkte, speziell auch auf den Diagonalen und der Berandung die Bedingung H_1 befriedigt. Schließlich erkennen wir noch, daß H_2 und H_3 erfüllt sind, mit Hülfe der folgenden Überlegungen.

Sei zunächst unter (x, y) ein weder auf der Berandung noch den Diagonalen des Fundamentalquadrates gelegener Punkt verstanden. Er liegt dann ganz im Inneren eines der Bereiche (1) . . . (4), nehmen wir etwa an (1). Wir zeigen, daß für einen solchen inneren Punkt H_2 befriedigt ist. Diese Bedingung verlangt die Endlichkeit von

$$\int_{a_0}^{\pi} \int_{0}^{d} \frac{|F(x, y, \gamma, \delta) - F(x, y, \gamma, +0)|}{\delta} \, d\gamma \, d\delta,$$

was sicherlich der Fall, wenn

$$\int_{-\pi-x}^{+\pi-x} \int_{0}^{d} \frac{|f(x+\gamma, y+\delta) - f(x+\gamma, y+0) + f(x+\gamma, y-\delta) - f(x+\gamma, y-0)|}{\delta} \, d\gamma \, d\delta$$

endlich ist.

Man zerlege dieses Integral gemäß der beigefügten Figur in die Summe von elf Teilintegralen. (Figur siehe Seite 54.) Vier davon wollen wir hier auswerten, die übrigen sieben lassen sich ganz analog behandeln. Für unsere Figur gilt $x < 0$, $y < 0$, daher hat man:

1. $$\int_{-\pi-x}^{-x-y-d} \int_{0}^{d} \frac{|(\pi - x+\gamma) - (\pi-x+\gamma) + (\pi - x+\gamma) - (\pi-x+\gamma)|}{\delta} \, d\gamma \, d\delta = 0$$

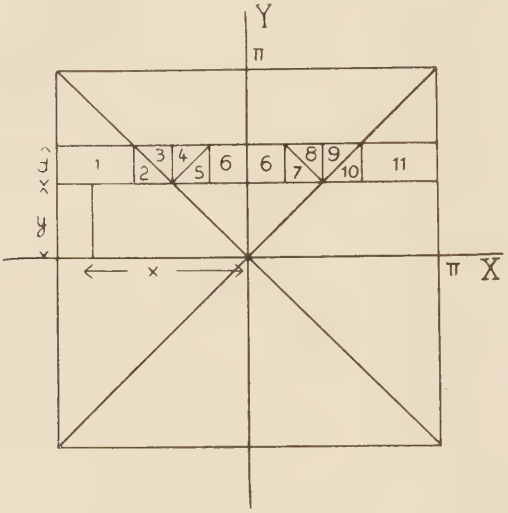
3. $$\int_{-x-y-d}^{-x-y} \int_{d-(\gamma+x+y+d)}^{d} \frac{(\pi - y-\delta) - (\pi+x+\gamma+\delta) + (\pi+x+\gamma) - (\pi+x+\gamma)}{\delta} \, d\gamma \, d\delta$$

$$= \int_{0}^{d} d\xi \int_{\xi}^{d} \frac{\xi - \delta}{\delta} \, d\delta$$

$$< \int_0^d d\xi \int_\xi^d \left(\frac{\xi}{\delta}+1\right) d\delta < \int_0^d \xi \left[\lg\frac{d}{\xi} + d + \xi \right] d\xi = \text{endlich},$$

wobei $\xi = -(\gamma + x + y)$ gesetzt wurde.

2. $$\int_{-x-y-d}^{-x-y} \int_0^{\gamma-(x+y+d)} \frac{|(\pi - x+\gamma) - (\pi - x+\gamma) + (\pi - x+\gamma) - (\pi - x+\gamma)|}{\delta} d\gamma\, d\delta = 0$$



(Figur zu Seite 53.)

4. $$\int_{x-y}^{x-y+d} \int_{\gamma+x+y}^{d} \frac{|(\pi - y - \delta) - (\pi - y) + (\pi + x + \gamma) - (\pi - y|}{\delta} d\gamma\, d\delta$$

$$= \int_0^d d\eta \int_\eta^d \frac{|\eta - \delta|}{\delta} d\delta$$

$$\leq \int_0^d d\eta \int_\eta^d \frac{\eta + \delta}{\delta} d\delta = \text{endlich, wo } \eta = \gamma + x + y.$$

Sämtliche Integrale sind endlich, also befriedigen sie H_2; auch wenn $y = 0$, so daß der betreffende Punkt auf der X-axe liegt, denn das hierbei neu auftretende Integral ergibt wieder:

$$\int_{-x}^{x+d} d\gamma \int_{\gamma+x}^{d} \frac{|(\pi - \delta) - (\pi - \gamma - x) + (\pi - \delta) - (\pi - \gamma - x)|}{\delta} d\delta$$

$$< 2 \int_0^d d\zeta \int_\zeta^d \frac{\zeta + \delta}{\delta} d\delta$$

$$= \text{endlich; } \zeta = \gamma + x \text{ gesetzt.}$$

Die Gültigkeit von H_2 für Punkte der Berandung und der Diagonalen läßt sich in genau derselben Weise zeigen. Aus der Symmetrie der darzustellenden Funktion, sowie der Bedingungen H_2 und H_3 folgt dann, daß für jeden Punkt des Fundamentalquadrates sämtliche Bedingungen unseres Lehrsatzes von § 3 erfüllt, so daß die Fourier'sche Doppelreihe dort die Funktion sicherlich darstellt.

Wir wenden uns nun zur expliziten Herstellung der betreffenden Doppelreihe. Für die Fourierschen Konstanten erhält man aus (2) p. 8 die Werte:

$$a_0^0 = \text{Mittelwert der Funktion}$$

$$= \frac{\text{Volumen der Pyramide}}{\text{Basis}} = \frac{\frac{4}{3}\pi^3}{4\pi^2} = \frac{\pi}{3}$$

$$b_0^0 = c_0^0 = d_0^0 = 0$$

$$2\pi^2 a_\mu^0 = \int_{-\pi}^{0} \cos\mu\alpha\,(\pi+\alpha)\,d\alpha \int_{\alpha}^{-\alpha} d\beta + \int_{0}^{\pi} (\pi-\alpha)\cos\mu\alpha\,d\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} d\beta$$

$$+ \int_{-\pi}^{0} (\pi+\beta)\,d\beta \int_{\beta}^{-\beta} \cos\mu\alpha\,d\alpha + \int_{0}^{\pi} (\pi-\beta)\,d\beta \int_{-\beta}^{\beta} \cos\mu\alpha\,d\alpha$$

$$= 2\left\{\int_{0}^{\pi} (\pi-\alpha)\cos\mu\alpha\,d\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} d\beta + \int_{0}^{\pi} (\pi-\beta)\,d\beta \int_{-\beta}^{\beta} \cos\mu\alpha\,d\alpha\right\}$$

$$= 4\int_{0}^{\pi} (\pi-\alpha)\left(\alpha\cos\mu\alpha + \frac{1}{\mu}\sin\mu\alpha\right) d\alpha$$

$$= \frac{4\pi}{\mu^2}(-1)^{\mu+1}$$

$$\therefore\ a_\mu^0 = \frac{2}{\pi\mu^2}(-1)^{\mu+1};\ b_\mu^0 = c_\mu^0 = d_\mu^0 = 0, \text{ wenn } \mu > 0.$$

Ebenso findet man:

$$a_0^\nu = \frac{2}{\pi\nu^2}(-1)^{\nu+1};\ b_0^\nu = c_0^\nu = d_0^\nu = 0, \text{ wenn } \nu > 0.$$

$$\pi^2 a_\mu^\nu = 2\left\{\int_0^\pi (\pi-\alpha)\cos\mu\alpha\,d\alpha\int_\alpha^\alpha \cos\nu\beta\,d\beta \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi (\pi-\beta)\cos\nu\beta\,d\beta\int_{-\beta}^\beta \cos\mu\alpha\,d\alpha\right\}$$

$$= 4\int_0^\pi (\pi-\alpha)\left\{\frac{\cos\mu\alpha\sin\nu\alpha}{\nu}+\frac{\cos\nu\alpha\sin\mu\alpha}{\mu}\right\}d\alpha$$

$$= 2\int_0^\pi (\pi-\alpha)\left\{\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\mu}\right)\sin(\nu+\mu)\alpha \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\mu}\right)\sin(\nu-\mu)\alpha\right\}d\alpha$$

$$= -2\pi\left\{\frac{1}{\nu(\mu+\nu)}+\frac{1}{\mu(\mu+\nu)}-\frac{1}{\nu(\mu-\nu)}+\frac{1}{\mu(\mu-\nu)}\right\}$$

$$= 0, \quad \text{wenn} \quad \mu \neq \nu,$$

$$\therefore \; a_\mu^\nu = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu.$$

$$\left.\begin{aligned} a_\nu^\nu &= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \frac{(\pi-\alpha)}{\nu}\sin 2\nu\alpha\,d\alpha = \frac{2}{\pi\nu^2} \\ b_\mu^\nu &= c_\mu^\nu = d_\mu^\nu = 0 \end{aligned}\right| \; \mu > 0, \nu > 0$$

Hiermit ergibt sich als Fouriersche Entwicklung der Pyramidenoberfläche die Doppelreihe:

$$(42)\quad f(x,y) = \frac{2}{\pi}\left|\begin{array}{llllll} \frac{\pi^2}{6} & +\cos x & -\frac{1}{4}\cos 2x & +\ldots+ & \frac{(-1)^{\mu+1}}{\mu^2}\cos\mu x & +\ldots \\ +\cos y & +\cos x\cos y & +\;0 & +\ldots+ & 0 & +\ldots \\ -\frac{1}{4}\cos 2y & +\;0 & +\frac{1}{4}\cos 2x\cos 2y & +\ldots+ & 0 & +\ldots \\ +\frac{1}{9}\cos 3y & +\;0 & +\;0 & +\ldots+ & 0 & +\ldots \\ +\ldots & & & & & \\ +\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^2}\cos\nu y & +\;0 & +\;0 & +\ldots & & \\ +\ldots & & & & & \end{array}\right.$$

Sie ist eine absolut konvergente Reihe, da die Reihe der absoluten Beträge der Koeffizienten konvergiert.

Nach Pringsheim[1]) p. 133 (7) und p. 142 (1) konvergiert dann auch die Diagonalreihe, doch könnte man berechtigte Zweifel hegen, ob ihre Summe wirklich die vorgeschriebene Funktion darstellt. Wir müssen also nachweisen, daß die Bedingungen des Lehrsatzes p. 33 erfüllt sind. Von D_1 und D_2 liegt das nach den Untersuchungen über H_1 und H_2 klar auf Hand. Von D_3 lehrt es die Anschauung für alle Punkte ausgenommen die Ecken des Fundamentalquadrates. Betrachten wir als Beispiel die Ecke (π, π):

$$f(\pi+\gamma, \pi+\delta) = \gamma \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 < \gamma \leqq a \\ \gamma < \delta \leqq a \end{cases}$$

$$f(\pi+\gamma, \pi+\delta) = -\gamma \quad \text{für} \quad \begin{cases} -a \leqq \gamma < 0 \\ -\gamma < \delta \leqq a \end{cases}$$

und transformieren wir auf ein unter 45° geneigtes Koordinatensystem, so wird:

$$f\left(\pi+\frac{\xi-\eta}{2}, \pi+\frac{\eta-\xi}{2}\right) = \frac{\xi-\eta}{2}, \text{ wenn } \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ 0 < \eta < \xi \end{cases}$$

$$f\left(\pi+\frac{\xi-\eta}{2}, \pi+\frac{\eta-\xi}{2}\right) = \frac{\eta-\xi}{2}, \text{ wenn } \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ \xi < \eta \leqq a \end{cases}$$

Wählt man nun:

$$f_+(\xi, \eta) = \frac{\xi}{2}, \text{ wenn } \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ 0 < \eta \leqq \xi \end{cases}$$

$$f_+(\xi, \eta) = \frac{\eta}{2}, \text{ wenn } \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ \xi < \eta \leqq a \end{cases}$$

als monoton zunehmende Funktion

und

$$f_-(\xi, \eta) = \frac{-\eta}{2}, \text{ wenn } \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ 0 < \eta < \xi \end{cases}$$

$$f_-(\xi, \eta) = \frac{-\xi}{2}, \text{ wenn } \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ \xi < \eta \leqq a \end{cases}$$

als monoton abnehmende,

so ist $f_+(\xi, \eta) + f_-(\xi, \eta) = f\left(\pi + \frac{\xi-\eta}{2}, \pi + \frac{\eta-\xi}{2}\right)$ die von D_3 verlangte Zerlegung im Eckpunkte (π, π). $f_+(\xi, \eta)$ und $f_-(\xi, \eta)$ sind in der Tat gleichsinnig monotone Funktionen, weil $\frac{\partial f}{\partial \xi}$

[1]) loco cit. p. 5 [3]).

und $\frac{\partial f_+}{\partial \eta}$ (resp. $\frac{\partial f_-}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial f_-}{\partial \eta}$) gleiches Vorzeichen haben, und weil sie auf der Linie $\xi = \eta$ stetig sind. Dies ist wesentlich!

Wir können nun ohne Bedenken unsere Fouriersche Reihe nach Diagonalen summieren und erhalten:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = \frac{2}{\pi}\Big\{ & 1 + (\cos x + \cos y) - \frac{1}{4}(\cos 2x - 4\cos x \cos y + \cos 2y) \\
& + \frac{1}{9}(\cos 3x + \cos 3y) - \frac{1}{16}(\cos 4x - 4\cos 2x \cos 2y + \cos 4y) \\
& + \frac{1}{25}(\cos 5x + \cos 5y) - \frac{1}{36}(\cos 6x - 4\cos 3x \cos 3y + \cos 6y) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\} \qquad (43) \\
= \frac{2}{\pi}\Big\{ & 1 + \sum_1^\infty \nu \Big[\frac{1}{(2\nu-1)^2}(\cos(2\nu-1)x + \cos(2\nu-1)y) \\
& - \frac{1}{4\nu^2}(\cos 2\nu x - 4\cos \nu x \cos \nu y + \cos 2\nu y)\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

Die Fejèrsche Summationsmethode auf (42) angewandt, liefert folgende Doppelreihe:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = \frac{2}{\pi}\Big\{ & \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{1\cdot 2}\cos x + \frac{1}{2\cdot 3}\Big(\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\Big) + \ldots \\
& + \frac{1}{1\cdot 2}\cos y + \frac{\cos x \cdot \cos y}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} + \frac{\cos x \cdot \cos y}{2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} + \ldots \\
& + \frac{1}{2\cdot 3}\Big(\cos y - \frac{1}{2}\cos 2y\Big) + \frac{\cos x \cdot \cos y}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3} + \frac{\cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 3} + \ldots \\
& + \frac{1}{3\cdot 4}\Big(\cos y - \frac{1}{2}\cos 2y + \frac{1}{3}\cos 3y\Big) + \frac{\cos x \cdot \cos y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 4} + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}
\end{aligned} \qquad (44)
$$

Diese Reihe ist unübersichtlicher und umständlicher zu summieren als (42).

Schließlich wollen wir noch das Poissonsche Integral für diese Funktion aufstellen. Wir finden mit Hülfe der Definitionsgleichungen von $f(x, y)$ auf pp. 52—53:

$$4\pi^2 \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = -\int_{\pi}^{0} d\alpha \int_{\alpha}^{\alpha} (\pi + \alpha) P(r, \alpha - x) P(\varrho, \beta - y)\, d\beta$$

$$+ \int_{0}^{\pi} d\beta \int_{-\beta}^{\beta} (\pi - \beta) P(r, \alpha - x) P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha$$

$$+ \int_{\pi}^{0} d\beta \int_{\beta}^{-\beta} (\pi + \beta) P(r, \alpha - x) P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha$$

$$+ \int_{0}^{\pi} d\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} (\pi - \alpha) P(r, \alpha - x) P(\varrho, \beta - y)\, d\beta$$

$$4\pi^2 \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \pi \int_{\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \alpha - x) P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha\, d\beta$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \int_{\alpha}^{-\alpha} \alpha \cdot P(r, \alpha - x) \cdot P(\varrho, \beta - y)\, d\beta$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} d\beta \int_{\beta}^{-\beta} \beta \cdot P(r, \alpha - x) \cdot P(\varrho, \beta - y)\, d\beta$$

$$= 4\pi \left\{ \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{(\pi - x)}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{\pi + x}{2}\right) \right\}$$

$$\times \left\{ \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{\pi - y}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{\pi + y}{2}\right) \right\}$$

$$- 2 \int_{\pi}^{\pi} \alpha P(r, \alpha - x) \left\{ \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{\alpha + y}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{\alpha - y}{2}\right) \right\} d\alpha$$

$$- 2 \int_{\pi}^{\pi} \beta P(\varrho, \beta - y) \left\{ \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{\beta + x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{\beta - x}{2}\right) \right\} d\alpha,$$

wo $P(r, \alpha - x) = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\alpha - x)}$, gemäß (23).

Die beiden letzten Integrale auszuwerten ist mir nicht gelungen, trotzdem die darzustellende Funktion $f(\alpha, \beta)$ recht einfach ist. Jedenfalls scheint mir das Poissonsche Integral, so kurz und übersichtlich in Form und so anpassungsfähig an Singularitäten der Funktion es auch sein mag, für zahlenmäßige Berechnung der Funktionswerte wenig geeignet. In dieser Hinsicht ist ihm die Fouriersche Doppelreihe weit überlegen.

Das mächtigste aber für die Darstellung von Funktionen zweier Variablen uns zu Gebote stehende Hülfsmittel ist ohne Frage die Fejèrsche Doppelreihe. Wenn ihre Aufstellung auch mühseliger als die der Fourierschen Reihe, so erspart sie uns andrerseits die lästige und häufig resultatlos verlaufende Untersuchung, ob die darzustellende Funktion die zur Konvergenz der Fourierschen Reihe erforderlichen Eigenschaften hat.

Lebenslauf.

Am 10. Juli 1888 als Sohn Walter des Kaufmanns Robert Küstermann und seiner Gattin Emma in Green Bay, Wisconsin, U. S. A., geboren und protestantischer Konfession, wurde ich mit sechs Jahren nach Detmold (Fürstentum Lippe) in die Realschule geschickt. Im April 1904 bestand ich die Einjährigenprüfung an dieser Anstalt, kehrte dann nach Amerika zurück und bestand im Dezember desselben Jahres mit Hülfe von Privatunterricht die Aufnahmeprüfung an der „University of Wisconsin“ in Madison, Wis., U. S. A., wo ich bis Juni 1909 immatrikuliert blieb. In 1908 erhielt ich von dieser Universität den Grad eines „Bachelor of Arts.“ Im Wintersemester 1909/10 bezog ich die Universität München, an der ich vier Jahre lang Vorlesungen der Herren Professoren Pringsheim, Voss, Lindemann, Sommerfeld, v. Seeliger und Graetz besuchte.

Allen meinen verehrten Lehrern, insbesondere Herrn Geheimrat Pringsheim, spreche ich für das liebenswürdige Entgegenkommen mit Rat und Beistand meinen herzlichsten Dank aus.